DOI: 10.21513/2410-8758-2020-4-104-120 УДК 551.581.1

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОМЕРНОЙ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СУХОЙ АТМОСФЕРЫ

С.М. Семенов [1,2,3)]

[1)] Институт глобального климата и экологии имени академика Ю.А. Израэля,
Россия, 107258, Москва, ул. Глебовская, д. 20б;
*адрес для переписки: *SergeySemenov1@yandex.ru*

[2)] Институт географии РАН,
Россия, 119017, Москва, Старомонетный пер., д. 29

[3)] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

Реферат. Среди специалистов в области математического моделирования климатической системы существуют различные мнения о том, каким классом моделей нужно пользоваться для анализа и прогноза климата для временных масштабов, соответствующих климатическим процессам. В данной работе исследуются свойства модели, построенной с использованием гидростатической гипотезы. Рассмотрена одномерная (горизонтально-однородная) гидростатическая модель сухой атмосферы. Воздух считается идеальным газом. Источником тепла является внешний поток коротковолнового излучения, поступающий на верхнюю границу атмосферы. Эта энергия частично поглощается атмосферными слоями и подстилающей поверхностью, а частично поступает обратно в космос. Атмосферные слои и подстилающая поверхность излучают в длинноволновом диапазоне. Коэффициент поглощения и теплоемкость, вообще говоря, специфичны для атмосферных слоев и всюду положительны. В модели радиационный баланс сегмента атмосферного столба над единичной площадкой подстилающей поверхности определяет изменение внутренней энергии и объема сегмента. При этом для малого сегмента значение давления всегда сохраняется равным весу части атмосферного столба над рассматриваемым сегментом (гидростатическая гипотеза). Подстилающая поверхность всегда находится в состоянии радиационного равновесия. В этих предположениях: а) в столбе существует единственное равновесное вертикальное распределение температуры, которому соответствуют распределения давления и плотности (они вычисляются с использованием предположения о гидростатичности и уравнения состояния идеального газа), и б) это распределение температуры является асимптотически устойчивым, т. е. любое иное распределение неотрицательных значений температуры, заданное в начальный момент времени, стремится со временем к равновесному равномерно на вертикали. Таким образом, можно ожидать, что численные аналоги рассмотренной в данной работе модели также будут устойчивы, что важно для вычислительной реализации как одномерной модели, так и ее трехмерной версии.

Ключевые слова. Сухая атмосфера, одномерная модель, гидростатическая гипотеза, равновесное состояние, асимптотическая устойчивость.

Введение

Одномерная, горизонтально-однородная. модель атмосферы – предмет сугубо теоретических исследований. С ее помощью можно лишь уточнять понимание основных процессов, протекающих в реальной атмосфере. В отношении атмосферы Земли из отечественных ученых подобные исследования проводил еще А.А. Фридман (1914) с использованием простейшей версии уравнений Навье-Стокса; см. также мемориальное собрание трудов (Фридман, 1966).

В данной работе используются следующие упрощенные модельные представления о динамике одномерной атмосферы.

I. Общая масса (кг) воздуха M_0 в столбе атмосферы над площадкой 1 м^2, конечна и неизменна; ее распределение $\rho(t, z)$ по высоте z ($z = 0$ соответствует подстилающей поверхности) в любой момент времени t (с) всюду положительно.

II. В любой момент времени t давление $P(t, z)$ (Па) в точке на высоте z равно

$$g \int_{z}^{+\infty} \rho(t,\xi)\, d\xi$$

(g – ускорение свободного падения, 9.8 м с$^{-2}$), т.е. весу воздуха над площадкой 1 м^2 (гидростатичность). На высотах до 100 км н.у.м., т.е. до общепринятой условной высотной границы земной атмосферы, ускорение свободного падения можно считать постоянным с удовлетворительной точностью для теоретических исследований.

Р.И. Нигматулин (2018) считает, что гидростатическая гипотеза применима при расчетах атмосферных процессов на значительных временах, на которых в среднем вертикальные составляющие сил инерции существенно меньше гравитационной силы. Хотя на этот счет и существуют определенные разногласия среди специалистов, в данной статье гидростатическая гипотеза принимается.

III. Распределение плотности (кг м$^{-3}$) воздуха по вертикали $\rho(t, z)$ эволюционирует во времени таким образом, что

$$\int_{z(t)}^{+\infty} \rho(t,\xi)\, d\xi,$$

где $z(t)$ – траектория любой заданной точки, сохраняется; тем самым, остается неизменным и значение давления – см. п. II.

Это означает, в частности, что для каждого t можно использовать замену переменных $m = \int_0^z \rho(t,\xi)\, d\xi$, при которой отрезкам по высоте $[z_1, z_2]$, $z_1 < z_2$, будут однозначно соответствовать определенные отрезки по массе $[m_1, m_2]$, $m_1 < m_2$, и наоборот. Такая замена переменных широко используется – см., например, (Белов, 1975). При этом для малых отрезков $\Delta z = z_2 - z_1$ и $\Delta m = m_2 - m_1$ выполнено $\Delta m = \rho\, \Delta z$ с точностью до малых более высокого порядка.

Это свойство эволюции плотности во времени имеет место и в классической одномерной модели Навье-Стокса, в систему уравнений которой входит уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho(t,z)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(v(t,z)\rho(t,z)\right).$$

Действительно, в предположении о том, что на подстилающей поверхности ($z = 0$) вертикальная скорость воздуха $v(t, 0)$ всегда нулевая,

$$\frac{d}{dt}\int_0^{z(t)} \rho(t,\xi)\,d\xi = \int_0^{z(t)} \frac{\partial\rho(t,\xi)}{\partial t} d\xi + v\big(t,z(t)\big)\,\rho\big(t,z(t)\big) =$$

$$-\,v\big(t,z(t)\big)\,\rho\big(t,z(t)\big) + v(t,0)\,\rho(t,0) + v\big(t,z(t)\big)\,\rho\big(t,z(t)\big) = 0.$$

Это, в частности, означает, что в модели не происходит вертикального перемешивания. Если в некоторый момент времени t_0 $z_2(t_0) \geq z_1(t_0)$*, то соотношение* $z_2(\mathrm{t}) \geq z_1(\mathrm{t})$ *будет справедливо и впоследствии при* $t > t_0$.

IV. Для любого отрезка масс $[m_1, m_2]$ при малом $\Delta m = m_2 - m_1 > 0$ и малом $\Delta t > 0$ с точностью до малых более высокого порядка изменение температуры T отрезка масс $[m_1, m_2]$ удовлетворяет условию

$$c_V(m_1)\Delta m\,\Delta T + P\Delta V = q\,\Delta m\,\Delta t, \qquad (1)$$

где c_V – теплоемкость массы воздуха данного отрезка при постоянном объеме; V – длина отрезка высот, соответствующего отрезку масс $[m_1, m_2]$, ΔV – ее изменение за время Δt; q – радиационный баланс на отрезке масс $[m_1, m_2]$ в расчете на единицу массы и единицу времени. Нетто-поступление радиационного тепла $q\ \Delta m\ \Delta t$ расходуется только на изменения объема ΔV и температуры рассматриваемой массы Δm.

V. Единственным первичным источником тепла в модели является поток коротковолнового излучения, поступающий на верхнюю границу атмосферы. Это излучение может в некоторой степени поглощаться атмосферными слоями и подстилающей поверхностью, а также направляется обратно в космос вследствие отражения подстилающей поверхностью и рассеяния атмосферными слоями.

VI. Атмосферные слои и подстилающая поверхность излучают в длинноволновом диапазоне. В модели подстилающая поверхность нацело поглощает длинноволновое излучение атмосферных слоев, к ней поступающее. Подстилающая поверхность находится в радиационном равновесии, т.е. нисходящий суммарный поток излучения из атмосферы всегда равен восходящему потоку длинноволнового излучения от подстилающей поверхности.

Уравнение состояния идеального газа для сухого атмосферного воздуха для отрезка высот $[z_1, z_2]$ дает соотношение

$$PV = \left(\frac{R}{\mu}\right)\Delta m\,T,$$

где R = 8.314 Дж моль$^{-1}$·К$^{-1}$ – газовая постоянная, а μ = 0.029 кг/моль –молекулярная масса воздуха.

Переходя к приращениям левой и правой части, учитывая неизменность давления P (см. п. II) с точностью до малых более высокого порядка и массы Δm (см. п. III), получаем соотношение

$$P\,\Delta V = \frac{R}{\mu}\,\Delta m\,\Delta T.$$

Комбинируя это соотношение с соотношением (1) и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ получаем уравнение

$$\frac{\partial T(t,m_1)}{\partial t} = \frac{1}{c_P(m_1)}\,q(t,m_1) \qquad (2)$$

где $T(t, m_1)$ – абсолютная температура воздуха (К) в такой точке на высоте z, масса воздуха под которой в столбе атмосферы над площадкой подстилающей поверхности 1 м^2 равна m_1 кг, $c_P(m_1)$ – теплоемкость воздуха в этой точке при постоянном давлении, а $q(t,m_1)$ – радиационный баланс в этой точке в расчете на единицу массы и единицу времени. Он зависит от нисходящего о восходящего потоков излучения, которые, в свою очередь, определяются потоками коротковолнового (солнечного) излучения, потоками длинноволнового атмосферных слоев и подстилающей поверхности, а также коэффициентами поглощения атмосферных слоев. Эти потоки детализированы в разделе «Результаты».

Таким образом, уравнением (2) определяется эволюция во времени профиля температуры $T(t, m_1)$. Принимая во внимание предположение о гидростатичности

$$P(t, m_1) = g(M_0 - m_1). \qquad (3)$$

Изменение во времени профиля плотности воздуха можно найти из уравнения состояния идеального газа $P = \frac{R}{\mu}\,\rho\, T$:

$$\rho(t,m_1) = \frac{\mu}{R\,T(t,m_1)}\,g(M_0 - m_1). \qquad (4)$$

Высота z_1, соответствующая массе m_1, равна

$$z_1 = \int_0^{m_1} \frac{dm}{\rho(t,m)}\,.$$

Соотношения (2), (3) и (4) описывают изменение во времени профилей температуры, давления и плотности атмосферного воздуха в рассматриваемой модели. Существование и устойчивость состояния равновесия в этой модели полностью определяется этими свойствами для уравнения (2).

Цель данной работы – исследовать свойства уравнения (2), а именно: – описать его стационарное решение, характеризующее состояние равновесия; – исследовать устойчивость этого состояния.

Методологические замечания

Для исследования уравнения (2) на устойчивость потребуются две технические леммы, приведенные в этом методическом разделе. Они касаются поведения решений дифференциальных уравнений для функций, аргумент которых – действительная переменная, а ее значения – функции на отрезке, принимающие действительные значения. При этом в правой части этих дифференциальных уравнений присутствует линейный интегральный оператор, преобразующий рассматриваемую функцию. Такие операторы и свойства систем, в изучении эволюции которых во времени они используются, описаны в работах (Красносельский, 1962; Интегральные уравнения, 1968; Позитивные линейные системы, 1985).

Задача данного методического раздела весьма частная, а именно, разгрузить изложение исследования стационарного решения уравнения (2) и его устойчивости, которое приводится в следующем разделе «Результаты», от технических деталей. Поэтому они вынесены в сформулированные в этом методическом разделе две технические леммы. При ознакомлении с данной статьей читатель может пропустить этот раздел и продолжить чтение с раздела «Результаты», а вернуться к этому разделу при необходимости получить информацию о технических деталях.

Ниже для функции f символами f_- и f_+ обозначены неположительная и неотрицательная части f, т.е. соответственно $\min\{-f, 0\}$ и $\max\{f, 0\}$. Символ ■ означает завершение доказательства.

Лемма 1. Пусть $f(t, m)$ – непрерывная функция на $[t_0, +\infty)$ x $[0, M_0]$, дифференцируемая по t, причем $\frac{\partial f(t,m)}{\partial t}$ также непрерывна, и $f(t,m)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f(t,\ m)}{\partial t} = g(t,m)\left\{\int_0^{M_0} k(m,m_1)f(t,m_1)dm_1 - f(t,m)\right\},$$

где $g(t, m)$ – непрерывная функция на $[t_0, +\infty)$ x $[0, M_0]$, принимающая лишь положительные значения, а $k(m, m_1)$ - непрерывная функция на $[0, M_0]$ x $[0, M_0]$, принимающая лишь неотрицательные значения, причем существует такое C, $0 < C < 1$, что $\int_0^{M_0} k(m,m_1)dm_1 < C$ для любого $m \in [0, M_0]$.

Тогда

а) функция $\varphi(t) = \sup\limits_{m\,\epsilon[0,\,M_0]} f_+(t,m)$ непрерывна, и для любых $t_* \geq t_0$, $t^* > t_*$ при $\varphi(t_*) > 0$ выполнено $\varphi(t^*) < \varphi(t_*)$, а при $\varphi(t_*) = 0$ выполнено $\varphi(t^*) = 0$;

б) функция $\psi(t) = \inf\limits_{m\,\epsilon[0,\,M_0]} f_-(t,m)$ непрерывна, и для любых $t_* \geq t_0$, $t^* > t_*$ при $\psi(t_*) < 0$ выполнено $\psi(t^*) > \psi(t_*)$, а при $\psi(t_*) = 0$ выполнено $\psi(t^*) = 0$.

Доказательство. Поскольку утверждение б) эквивалентно утверждению а) при замене функции f на $(-f)$, то достаточно доказать утверждение а).

1. В силу условия леммы для функций f, g и k модуль правой части уравнения (а, значит, и левой части $\frac{\partial f(t,m)}{\partial t}$)равномерно ограничен по m на любом отрезке $[t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \geq t_0$. Следовательно, на отрезке $[t_1, t_2]$ функция $f(t, m)$ рав-

номерно непрерывна по t. Поскольку $f_+ = (|f| + f)/2$, то это же справедливо и в отношении f_+.

Для любых t_*, $t^* \geq t_0$ выполнено:

$$|\varphi(t^*) - \varphi(t_*)| = |\sup_{m \in [0, M_0]} f_+(t^*, m) - \sup_{m \in [0, M_0]} f_+(t_*, m)| \leq$$
$$\sup_{m \in [0, M_0]} |f_+(t^*, m) - f_+(t_*, m)|.$$

Выражение, приведенное в правой части неравенства, стремится к нулю при $t^* \to t_*$ в силу равномерной непрерывности функции f_+ по t.

2. Пусть $t > t_0$ и $\varphi(t) = a > 0$. Обозначим через X подмножество таких $m \in [0, M_0]$, что $f(t, m) = a$. Поскольку f – непрерывная функция, то X – компакт. Покажем, что для любого $m \in X$ выполнено $\frac{\partial f(t,m)}{\partial t} < 0$. Действительно,

$$\frac{\partial f(t, m)}{\partial t} = g(t,m)\left\{\int_0^{M_0} k(m,m_1) f(t,m_1)dm_1 - f(t,m)\right\} =$$

$$\frac{\partial f(t, m)}{\partial t} = a\, g(t,m)\left\{\int_0^{M_0} k(m,m_1)[f(t,m_1)/a]dm_1 - 1\right\} \leq$$

$$a\, g(t,m)\left\{\int_0^{M_0} k(m,m_1)dm_1 - 1\right\} \leq a\, g(t,m)\,(C-1) < 0.$$

В силу непрерывности f и $\frac{df}{dt}$, для любого $m \in X$ существует такая окрестность U_m и $\Delta_m t > 0$, что $\frac{df}{dt} < b_m$ для некоторого $b_m < 0$, и $f > 0$ на множестве $U_m \times [t, t + \Delta_m t]$.

Поскольку X – компакт, а открытые множества U_m образуют его покрытие, то из них можно выбрать конечное покрытие. Обозначим через U объединение этой конечной совокупности, соответствующее минимальное $\Delta_m t$ через Δt, а соответствующее максимальное b_m через b; $b < 0$.

Обозначим через Y дополнение множества U в $[0, M_0]$.

Пусть множество Y не пусто. Оно компактно и не пересекается с компактом X. Поэтому $a_1 = \sup_{m \in Y} f(t,m) < a$. В силу непрерывности функции f при малых $\delta t > 0$ выполнено:

$$\sup_{m \in Y} f(t+\delta t, m) < \sup_{m \in X} f(t+\delta t, m) \leq \sup_{m \in U} f(t+\delta t, m).$$

То есть при значении первого аргумента $(t + \delta t)$ точная верхняя грань значений функции f по второму аргументу на всем $[0, M_0]$ такая же, как на множестве U.

Остается заметить, что при малых положительных $\delta t < \Delta t$

$$0 < \sup_{m \in U} f(t+\delta t, m) < a + b\,\delta t < a$$

по построению множества U.

Если же Y пусто, то достаточно последнего замечания.

Таким образом, показано что, если $\varphi(t) > 0$, то при малых $(t_1 - t) > 0$ выполнено $\varphi(t_1) < \varphi(t)$.

3. Пусть $t^* > t_* \geq t_0$ и $\varphi(t_*) > 0$. Покажем, что $\varphi(t^*) < \varphi(t_*)$.

3.1. Предположим, что $\varphi(t^*) > \varphi(t_*)$. Обозначим через t_2 точную верхнюю грань таких $t \in [t_*, t^*]$, что $\varphi(t) \leq \varphi(t_*)$. Поскольку φ непрерывна, $\varphi(t_2) = \varphi(t_*)$ и $t_2 < t^*$. Тогда для $t \in [t_2, t^*]$ $\varphi(t) > \varphi(t_2)$, что невозможно при малых $(t - t_2) > 0$, как показано в п. 2.

3.2. Предположим, что $\varphi(t^*) = \varphi(t_*)$.

Тогда в силу непрерывности функции φ:

– либо существует такое $t_2 \in [t_*, t^*]$, что $0 < \varphi(t_2) < \varphi(t_*)$, что невозможно, как показано в п. 3.1;

– либо существует такое $t_2 \in [t_*, t^*]$, что $\varphi(t_2) > \varphi(t_*) > 0$, что невозможно, как показано в п. 3.1;

– либо $\varphi(t) \equiv \varphi(t_*)$ на $[t_*, t^*]$, что также невозможно, поскольку $\varphi(t_*) > 0$, и при малых $(t - t_*) > 0)$ в силу п. 2 должно быть $\varphi(t) < \varphi(t_*)$.

Таким образом, при $t^* > t_* \geq t_0$ и $\varphi(t_*) > 0$ выполнено $\varphi(t^*) < \varphi(t_*)$.

4. Предположим, что $t^* > t_* \geq t_0$ и $\varphi(t_*) = 0$. Покажем, что $\varphi(t^*) = 0$.

Действительно, если $\varphi(t^*) > 0$, то в силу непрерывности функции φ существует такое $t_2 \in [t_*, t^*]$, что $0 < \varphi(t_2) < \varphi(t_*)$, что невозможно, как показано в п. 3.2

■

Следствие из леммы 1. В условиях леммы 1 для любого $t \geq t_0$

$$\sup_{m \in [0, M_0]} |f(t,m)| \leq \sup_{m \in [0, M_0]} |f(t_0,m)| .$$

Доказательство. Это следует из соотношения

$$\sup_{m \in [0, M_0]} |f(t,m)| = \max\{\varphi(t), -\psi(t)\}.$$

Функция в правой части этого равенства является невозрастающей, поскольку она есть максимум из двух невозрастающих функций. ■

Замечание к лемме 1. Никакие свойства отрезка $[0, M_0]$, кроме наличия меры и компактности, при доказательстве леммы 1 не использовались. Тем самым она справедлива не только для отрезка $[0, M_0]$, но и для любого компакта с мерой.

Лемма 2. Пусть $f(t, m)$ – непрерывная функция на $[t_0, +\infty) \times [0, M_0]$, дифференцируемая по t, причем $\frac{\partial f(t,m)}{\partial t}$ также непрерывна, и $f(t, m)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f(t,m)}{\partial t} = g(t,m) \left\{\int_0^{M_0} k(m,m_1) f(t,m_1) dm_1 - f(t,m)\right\},$$

где $g(t, m)$ – непрерывная функция на $[t_0, +\infty) \times [0, M_0]$, причем $g(t, m) > C_0$ при некотором $C_0 > 0$ на всей области определения, а $k(m, m_1)$ – непрерывная функция на $[0, M_0]$ х $[0, M_0]$, принимающая лишь неотрицательные значения на всей области определения, причем при некотором $C< 1$ $\int_0^{M_0} k(m,m_1)dm_1 < C$ для любого $m \in [0, M_0]$.

Тогда

а) функция $\varphi(t) = \sup_{m\in[0,M_0]} f_+(t,m)$ является невозрастающей и стремящейся к нулю при $t \to +\infty$;

б) функция $\psi(t) = \inf_{m\in[0,M_0]} f_-(t,m)$ является неубывающей и стремящейся к нулю при $t \to +\infty$.

Доказательство. Поскольку утверждение б) эквивалентно утверждению а) при замене функции f на $(-f)$, то достаточно доказать утверждение а).

Если $\varphi(t_0) = 0$, то $\varphi(t) \equiv 0$ в силу леммы 1, т.е. утверждение а) выполнено.

Пусть $\varphi(t_0) > 0$. В силу леммы 1 неотрицательная функция $\varphi(t)$ при $t \geq t_0$ является невозрастающей.

Предположим, что $A = \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) > 0$. Выберем такое $\varepsilon > 0$, что для любого $m \in [0, M_0]$

$$\frac{(A+\varepsilon)}{A}\int_0^{M_0} k(m,m_1)dm_1 < 1.$$

Для этого пригоден любой положительный $\varepsilon < A(1/C - 1)$, поскольку по условию леммы $\int_0^{M_0} k(m,m_1)dm_1 < C < 1$ для любого $m \in [0, M_0]$.

Выберем такое $t_2 \geq t_0$, что при $t \geq t_2$ выполнено $\varphi(t) \leq A + \varepsilon$. Для каждого $t \geq t_2$ обозначим через X_t подмножество $[0, M_0]$, на котором $f(t, m) \geq A$. Это – вложенная совокупность замкнутых множеств, т.е. $X_{t+\Delta t} \subseteq X_t$ при $\Delta t \geq 0$. Дей-ствительно, если бы некоторая точка m_1 удовлетворяла условию $m_1 \notin X_t$, но $m_1 \in X_{t+\Delta t}$, то существует такое δt, $0 < \delta t \leq \Delta t$ что при $t_1 \in [t, t+\delta t]$ было бы выполнено $f(t_1, m_1) < A$, но $f(t+\delta t, m_1) = A$. Однако это невозможно, поскольку

$$\frac{\partial f(t+\delta t,\ m_1)}{\partial t} = g(t+\delta t,\ m_1)\left\{\int_0^{M_0} k(m_1,m_2)f(t+\delta t,m_2)dm_2 - f(t+\delta t,m_1)\right\} = g(t+\delta t,\ m_1)\left\{\int_0^{M_0} k(m_1,m_2)f(t+\delta t,m_2)dm_2 - A\right\} = A\,g(t+\delta t,\ m_1)\left\{\frac{1}{A}\int_0^{M_0} k(m_1,m_2)f(t+\delta t,m_2)dm_2 - 1\right\} \leq$$

$$A\,g(t+\delta t,\ m_1)\left\{\frac{(A+\varepsilon)}{A}\int_0^{M_0} k(m_1,m_2)dm_2 - 1\right\} < 0$$

в силу выбора ε и положительности функции g.

Таким образом, множества X_t при $t \geq t_2$ образуют вложенную совокупность. Поскольку это замкнутые подмножества компакта $[0, M_0]$, то они имеют общую точку $m_* \in [0, M_0]$.

Значения $f(t, m_*)$ при $t \geq t_2$ находятся в пределах отрезка $[A, A+\varepsilon]$. Однако это невозможно при $t \to +\infty$, поскольку

$$\frac{\partial f(t,\ m_*)}{\partial t} = g(t,\ m_*)\left\{\int_0^{M_0} k(m_*, m_2) f(t, m_2) dm_2 - f(t, m_*)\right\} \leq$$
$$g(t,\ m_*)\left\{\int_0^{M_0} k(m_*, m_2) f(t, m_2) dm_2 - A\right\} =$$
$$A\, g(t,\ m_*)\left\{\frac{1}{A}\int_0^{M_0} k(m_*, m_2) f(t, m_2) dm_2 - 1\right\} \leq$$

$$A\, g(t,\ m_*)\left\{\frac{(A+\varepsilon)}{A}\int_0^{M_0} k(m_*, m_2) dm_2 - 1\right\} \leq\ AC_0 \left\{\frac{(A+\ \varepsilon)}{A}\int_0^{M_0} k(m_*, m_2) dm_2 - 1\right\} < 0$$

в силу ограниченности снизу функции g положительной константой C_0 и выбора ε.

Это противоречие показывает, что, если $\varphi(t_0) > 0$, то $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$.

■

Следствие из леммы 2. В условиях леммы 2 $\sup_{m\,\epsilon\,[0,\,M_0]} |f(t, m)|$, не возрастая, стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Доказательство. Утверждение следует из того, что

$$\sup_{m\,\epsilon[0,\,M_0]} |f(t, m)| = \max\{\varphi(t), -\psi(t)\}.$$

Обе функции в правой части этой формулы не возрастают и стремятся к нулю при $t \to +\infty$ в силу леммы 2.■

Замечание к лемме 2. Никакие свойства отрезка $[0, M_0]$, кроме наличия меры и компактности, при доказательстве леммы 2 не использовались. Тем самым она справедлива не только для отрезка $[0, M_0]$, но и для любого компакта с мерой.

Результаты

Состояние равновесия

Введем следующие обозначения:

– $J^{\downarrow}(m)$ и $J^{\uparrow}(m)$ – соответственно нисходящий и восходящий потоки длинноволнового излучения в точке на высоте z, масса воздуха под которой в столбе атмосферы над площадкой подстилающей поверхности размером 1 м^2 равна m;

– $w(m) > 0$ – коэффициент поглощения длинноволнового излучения в этой точке в расчете на единицу массы 1 кг;

– $s(m) \geq 0$ – поток коротковолнового излучения, поглощаемого в этой точке в расчете на единицу массы воздуха 1 кг над такой площадкой;

– $s_0 > 0$ – поток коротковолнового излучения, поглощаемый площадкой подстилающей поверхности 1 м^2.

Значение s_0 и профиль $s(m)$ являются входной информацией для данной модели и могут быть вычислены, например, следуя алгоритму, изложенному в работе (Semenov, Popov, 2011).

В этих предположениях в состоянии равновесия выполняются соотношения:

$$\frac{dJ^{\uparrow}(m)}{dm} = -w(m)J^{\uparrow}(m) + 0.5\left[w(m)\left(J^{\uparrow}(m) + J^{\downarrow}(m)\right) + s(m)\right]$$
(5)
$$\frac{dJ^{\downarrow}(m)}{dm} = w(m)J^{\downarrow}(m) - 0.5\left[w(m)\left(J^{\uparrow}(m) + J^{\downarrow}(m)\right) + s(m)\right].$$

Также, в состоянии равновесия восходящий поток длинноволнового излучения от слоя атмосферы с массой воздуха m, примыкающего к подстилающей поверхности, должен быть равен сумме нисходящего потока длинноволнового излучения и поглощенного в этом слое и подстилающей поверхностью потока коротковолнового излучения:

$$J^{\uparrow}(m) = s_0 + \int_0^m s(m_1)dm_1 + J^{\downarrow}(m) \tag{6}$$

.

Комбинируя это соотношение с первым из уравнений (5), получаем:

$$\frac{dJ^{\uparrow}(m)}{dm} = 0.5\, s(m) - 0.5\, w(m)s_0 - 0.5w(m)\left(\int_0^m s(m_1)\, dm_1\right). \tag{7}$$

Интегрируя от m до M_0 и учитывая равенство (6), получаем:

$$J^{\uparrow}(m) = s_0 + \int_0^{M_0} s(m_1)dm_1 - 0.5\int_m^{M_0} s(m_1)dm_1 + 0.5\, s_0 \int_m^{M_0} w(m_1)dm_1 + 0.5\int_m^{M_0} w(m_1)\left[\int_0^{m_1} s(m_2)dm_2\right]dm_1$$
(8)
$$J^{\downarrow}(m) = 0.5\int_m^{M_0} s(m_1)dm_1 + 0.5\, s_0 \int_m^{M_0} w(m_1)dm_1 + 0.5\int_m^{M_0} w(m_1)\left[\int_0^{m_1} s(m_2)dm_2\right]dm_1;$$

$$J^{\uparrow}(m) + J^{\downarrow}(m) = s_0 + \int_0^{M_0} s(m_1)dm_1 + s_0 \int_m^{M_0} w(m_1)dm_1 + \int_m^{M_0} w(m_1)\left[\int_0^{m_1} s(m_2)dm_2\right]dm_1$$

Равновесный профиль значений температуры воздуха $T_*(m)$ вычисляется из условия равенства нулю радиационного баланса следующим образом:

$$2\,\sigma\, w(m)T_*^4(m) = w(m)\left(J^{\uparrow}(m) + J^{\downarrow}(m)\right) + s(m);$$
(9)
$$T_*(m) = \sqrt[4]{0.5\sigma^{-1}\left(J^{\uparrow}(m) + J^{\downarrow}(m) + \frac{s(m)}{w(m)}\right)}.$$

Здесь σ = 5.670367 ⋅ 10^{-8} Вт $м^{-2}$ $К^{-4}$ – постоянная Стефана.

При этом, поскольку подстилающая поверхность находится в состоянии радиационного равновесия (см. Введение, предположение п. VI), то температура последней равна

$$T_{*0} = \sqrt[4]{\sigma^{-1}(J^{\downarrow}(0) + s_0)}\ . \tag{10}$$

В случае, если атмосфера вообще не поглощает коротковолновое излучение ($s(m) \equiv 0$), а получает тепло лишь в виде длинноволнового излучения подстилающей поверхности, формулы (8-10) существенно упрощаются:

$$J^{\uparrow}(m) = s_0 + 0.5\, s_0 \int_m^{M_0} w(m_1)dm_1 \quad ;$$

$$J^{\downarrow}(m) = 0.5\, s_0 \int_m^{M_0} w(m_1)dm_1;$$

$$J^{\uparrow}(m) + J^{\downarrow}(m) = s_0\,(1 + \int_m^{M_0} w(m_1)dm_1);$$

$$T_*(m) = \sqrt[4]{0.5\sigma^{-1} s_0\,(1 + \int_m^{M_0} w(m_1)dm_1)} \;;$$

$$T_{*0} = \sqrt[4]{\sigma^{-1}\, s_0\,(1 + 0.5\int_0^{M_0} w(m_1)dm_1)}$$

Заметим, что $T_{*0} > T_*(0)$. В реальной атмосфере подобные разрывы температурного поля на границе сред компенсируются в ходе передачи тепла иными, нерадиационными процессами.

Итак, в модели (2 - 4) существует единственный равновесный профиль температуры воздуха, характеризуемый формулой (9). При этом формулы

$$P_*(m) = g\,(M_0 - m)\,; \tag{11}$$

$$\rho_*(m) = \frac{\mu}{R\,T_*(m)}\, g(M_0 - m) \tag{12}$$

характеризуют соответствующие вертикальные профили давления и плотности воздуха в равновесии.

Устойчивость равновесия

В модели (2) равновесие устанавливается в ходе обмена теплом с помощью потоков лучистой энергии между атмосферными слоями, а также между ними и подстилающей поверхностью. Этот обмен осуществляется на длинных волнах, хотя первичным источником энергии в модели является поток коротковолнового (солнечного) излучения. Он поглощается атмосферными слоями ($s(m)$, $m \in [0, M_0]$) и подстилающей поверхностью s_0. В сумме земная система в модели поглощает $S_e = (s_0 + \int_0^{M_0} s(m_1)dm_1)$ Вт м$^{-2}$ энергии в форме коротковолнового излучения.

Напомним, что единственное стационарное решение $T_*(m)$ уравнения (2) строго положительно, поскольку удовлетворяет условию

$$T_*(m) \geq \sqrt[4]{0.5\sigma^{-1} s_0} > 0.$$

при всех $m \in [0, M_0]$ (см. формулу (9) в предыдущем разделе).

С учетом того, что подстилающая поверхность постоянно находится в состоянии радиационного равновесия (см. Введение, предположение п. VI), слой воздуха малой массы dm, находящийся на такой высоте, что масса воздуха под ним в столбе воздуха над площадкой 1 м^2 равна m, абсорбирует за малое время dt следующие порции лучистого тепла:

– $s(m)\, dm\, dt$ коротковолнового излучения;

– $w(m)s_0 \exp(-\int_0^m w(m_1)dm_1)\, dm\, dt$ длинноволнового эквивалента коротковолнового излучения, поглощенного подстилающей поверхностью;

– $w(m)\exp[-|\int_0^m w(m_2)dm_2 - \int_0^{m_1} w(m_2)dm_2|\,]\,\{w(m_1)\,\sigma\, T^4(t,m_1)\, dm_1\}\, dm\, dt$

длинноволнового излучения, пропущенного атмосферой от слоя малой массы dm_1, масса под которым равна m_1 ;

– $w(m)\exp[-(\int_0^m w(m_2)dm_2 + \int_0^{m_1} w(m_2)dm_2\,)]\,\{w(m_1)\,\sigma\, T^4(t,m_1)\, dm_1\,\}\, dm\, dt$

длинноволнового излучения, пропущенного атмосферой от слоя малой массы dm_1 к подстилающей поверхности, ею излученного и пропущенного атмосферой к слою малой массы dm, масса под которым равна m.

В этих условиях процесс обмена теплом между атмосферными слоями, а также между ними и подстилающей поверхностью, приводит в модели (2) к установлению равновесного вертикального распределения температуры воздуха. Покажем это.

Теорема. Пусть $T(t, m)$ – непрерывная функция на $[t_0\,, +\infty)$ x $[0, M_0]$, дифференцируемая по t, причем $\frac{\partial T(t,m)}{\partial t}$ также непрерывна, и $T(t, m)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial T(t,\ m)}{\partial t} = \frac{1}{c_P(m)}\left\{w(m)\int_0^{M_0} K(m,m_1)\, w(m_1)\sigma\, T^4(t,m_1)dm_1 + s(m) \right.$$
$$\left. + \ w(m)\ s_0\ \exp(-\int_0^m w(m_1)dm_1) - 2\, w(m)\sigma T^4(t,m)\right\}, \tag{13}$$

где $s_0 > 0$, а $w(m)$ и $c_P(m)$ – непрерывные положительные функции на $[0, M_0]$, и

$$K(m,m_1) = \exp[-|\int_0^m w(m_2)dm_2 - \int_0^{m_1} w(m_2)dm_2|\,] + \exp[-(\int_0^m w(m_2)dm_2 + \int_0^{m_1} w(m_2)dm_2)]\,.$$

Тогда при любом начальном условии $T(t_0, m)$, таком, что $T(t_0, m) \geq 0$ при всех $m \in [0, M_0]$, $T(t, m)$ стремится к стационарному решению уравнения (13) $T_*(m)$ равномерно по m.

Доказательство.

1. Выберем какое-либо такое C_1, что

$$0 < C_1 < \sqrt[4]{0.5\sigma^{-1} s_0\, \exp(-\int_0^{M_0} w(m_1)dm_1)}\,.$$

Тогда, поскольку первые два члена в фигурных скобках в правой части уравнения (13) неотрицательны, а $w(m)$ и $c_P(m)$ положительны и непрерывны на $[0, M_0]$, то при $T(t, m) \le C_1$ выполнено

$$\frac{\partial T(t,m)}{\partial t} \ge \inf_{m_1 \in [0,M_0]} \left\{\frac{w(m_1)}{c_P(m_1)}\right\} \left\{s_0 \exp\left(-\int_0^{M_0} w(m_1)dm_1\right) - 2\,\sigma\, C_1^4\right\} = v > 0.$$

Следовательно, за конечное время, не большее C_1/ v, для каждого $m \in [0, M_0]$ значение переменной $T(t, m)$ становится больше C_1. При этом оно впоследствии не может вернуться в пределы отрезка $[0, C_1]$, поскольку при $T(t, m) \le C_1$ производная $\frac{\partial T(t,m)}{\partial t}$ превосходит положительное число v. Таким образом, при $t \ge t_{00} = t_0 + C_1 / v$ выполнено $T(t, m) \ge C_1 > 0$ при всех $m \in [0, M_0]$.

2. В силу условия (13), для $T(t, m)$ и $T_*(m)$ выполнено:

$$\frac{\partial T(t,m)}{\partial t} = \frac{1}{c_P(m)} \Big\{w(m) \int_0^{M_0} K(m,m_1)\, w(m_1)\, \sigma\, T^4(t,m_1)dm_1 + s(m) +$$
$$w(m)\, s_0 \exp(-\int_0^{m} w(m_1)dm_1) - 2\, w(m)\sigma T^4(t,m)\Big\};$$

$$\frac{\partial T_*(m)}{\partial t} = \frac{1}{c_P(m)} \Big\{w(m) \int_0^{M_0} K(m,m_1)\, w(m_1)\, \sigma\, T_*^4(m_1)dm_1 + s(m) +$$
$$w(m)\, s_0 \exp(-\int_0^{m} w(m_1)dm_1) - 2\, w(m)\sigma T_*^4(m)\Big\}.$$

Вычитая из первого соотношения второе, получаем

$$\frac{\partial T(t,m)}{\partial t} = \frac{1}{c_P(m)} \Big\{w(m) \int_0^{M_0} K(m,m_1)\, w(m_1)\, \sigma\, (T^4(t,m_1) - T_*^4(m_1))\, dm_1 -$$
$$2\, w(m)\, \sigma (T^4(t,m) - T_*^4(m))\Big\} =$$
$$\frac{2\,\sigma\, w(m)}{c_P(m)} \Big\{\int_0^{M_0} 0.5\, K(m,m_1)\, w(m_1)(T^4(t,m_1) - T_*^4(m_1))\, dm_1 - (T^4(t,m) -$$
$$T_*^4(m))\Big\}.$$

Далее, с учетом этого соотношения,

$$\frac{\partial (T^4(t,m) - T_*^4(m))}{\partial t} = \frac{\partial (T^4(t,m))}{\partial t} = 4\,(T^3(t,m))\,\frac{\partial T(t,\ m)}{\partial t} =$$
$$\frac{8\,\sigma\, w(m)\ T^3(t,m)}{c_P(m)} \Big\{\int_0^{M_0} 0.5\, K(m,m_1)\, w(m_1)\, (T^4(t,m_1) - T_*^4(m_1))\, dm_1 -$$
$$(T^4(t,m) - T_*^4(m))\Big\}.$$

3. Если, теперь, в соотношении

$$\frac{\partial (T^4(t,m) - T_*^4(m))}{\partial t} =$$
$$\frac{8\,\sigma\, w(m)\ T^3(t,m)}{c_P(m)} \Big\{\int_0^{M_0} 0.5\, K(m,m_1)\, w(m_1)\, (T^4(t,m_1) - T_*^4(m_1))\, dm_1 -$$
$$(T^4(t,m) - T_*^4(m))\Big\} \qquad (14)$$

обозначить $f(t, m) = T^4(t,m) - T_*^4(m)$, $k(m, m_1) = 0.5\, K(m,m_1)w(m_1)$ и $g(t,\ m) = \frac{8\,\sigma\, w(m)\ T^3(t,m)}{c_P(m)}$, то при $t \ge t_{00}$ мы оказываемся в условиях леммы 2 (см. методологически раздел).

Действительно, $g(t,\ m) = \frac{8\,\sigma\,w(m)\ T^3(t,m)}{c_P(m)} \ \geq\ 8\,\sigma \ \{\inf_{m_1 \in [0,M_0]} \frac{w(m_1)}{c_P(m_1)}\}\ C_1^3 =$

$C_0 > 0$. Кроме того, $\int_0^{M_0} k(m,m_1)dm_1 = \ 0.5\int_0^{M_0} K(m,m_1)\,w(m_1)\,dm_1 =$

$$1 - 0.5\ \{\exp[-\int_m^{M_0} w(m_2)dm_2] - \exp[-\int_0^{m} w(m_2)dm_2 - \int_0^{M_0} w(m_2)dm_2]\} =$$
$$1 - 0.5\exp[-\int_0^{M_0} w(m_2)dm_2]\{\exp[\int_0^{m} w(m_2)dm_2] + \exp[-\int_0^{m} w(m_2)dm_2]\}$$
$$\leq 1 - \exp\left[-\int_0^{M_0} w(m_2)dm_2\right] = C < 1.$$

В последнем переходе использован то факт, что сумма положительного числа $\exp\left[\int_0^m w(m_2)dm_2\right]$ и обратного всегда не меньше 2.

Таким образом, в силу следствия из леммы 2 $f(t,\ m)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $m \in [0,\ M_0]$. ■

Заключение

Современные климатические модели широко используются в прикладных целях. Они часто весьма сложны, описывают совместное изменение в пространстве и во времени сотен и тысяч переменных. Конечно, исследование их на устойчивость проблематично в силу их сложности. Однако все же его необходимо проводить хотя бы в отношении их упрощенных аналогов – моделей уменьшенной и минимальной сложности. Иначе не будет уверенности в адекватности применяемой технологии моделирования – ведь реальный климат, несомненно, устойчив.

В данной работе обсуждается весьма частный вопрос – устойчивость одномерной гидростатической модели сухой атмосферы. Необходимо провести более широкое исследование состояния равновесия модели и его устойчивости, включив в модель нерадиационный перенос тепла, воду в различных фазах и ее фазовые превращения, а также заменить предположение о радиационном равновесии подстилающей поверхности на менее ограничивающее. Конечно, имея в виду потребности исследования реального климата, было бы важно рассмотреть трехмерный случай.

В завершение отметим, что для окончательного вывода о целесообразности применения гидростатических моделей для описания эволюции климата пока не хватает обоснования гидростатической гипотезы (например, как асимптотики), исходя из универсального описания динамики атмосферы с помощью уравнений Навье-Стокса.

Список литературы

Белов П.Н. 1975. Численные методы прогноза погоды. – Ленинград, Гидрометеоиздат, 392 с.

Интегральные уравнения. 1968. / Под ред. Забрейко П.П., Кошелева А.И., Красносельского М.А., Михлина С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я. – Москва, Наука, 448 с.

Красносельский М. А. 1962. Положительные решения операторных уравнений: Главы нелинейного анализа. – Москва, Физматгиз, 394 с.

Нигматулин Р.И. 2018. Уравнения гидро- и термодинамики атмосферы при малых силах инерции по сравнению с силой тяжести – Прикладная математика и механика, т. 82, вып. 4, с. 472-484, DOI 10.31857/S003282350000205-5.

Позитивные линейные системы: Метод положительных операторов. / Под ред. М. А. Красносельского, Е.А. Лифшица, А.В. Соболева. 1985. – М., Наука, 255 с.

Фридман А.А. 1966. Избранные труды. / Под ред. проф. Л.С. Полака. – Издательство «Наука», 462 с.

Friedmann A.A. 1914. Zur Theorie der Vertikaltemperatureverteilung. – Mereorol. Z., vol. 31, pp. 154-156.

Semenov S.M., Popov I.O. 2011. Comparative Estimates of Influence of Changes in Carbon Dioxide, Methane, Nitrous Oxide, and Water Vapor Concentrations on Radiation-Equilibrium Temperature of Earth's Surface. – Russian Meteo-rology and Hydrology, vol. 36, No. 8, pp. 520-526, DOI 10.3103/S106837391 1080036.

Статья поступила в редакцию: 01.10.2020 г. *После редактирования:16.12.2020 г.*

STABILITY OF EQUILIBRIUM IN A ONE-DIMENSIONAL HYDROSTATIC MODEL OF THE DRY ATMOSPHERE

S.M. Semenov

Yu. A. Izrael Instiute of Global Climate and Ecology,
20B, Glebovskaya str., 107258, Moscow, Russian Federation,
* corresponding author: SergeySemenov1@yandex.ru

Institute of Geography, Russian Academy of Sciences,
29, Staromonetny per., 119017, Moscow, Russian Federation

National Research University Higher School of Economics,
20, Myasnitskaya, 101000, Moscow, Russian Federation

Abstract. Experts in the field of mathematical modeling of the climate system have different views about which class of models should be employed to analyze and predict climate for time scales corresponding to climatic processes. In this paper, we investigate the properties of a model constructed using the hydrostatic hypothesis. A one-dimensional (horizontally homogeneous) hydrostatic model of a dry atmosphere is considered. Air is considered an ideal gas. The source of heat is the external short-wave radiation flux entering the upper boundary of the atmosphere. This energy is partly absorbed by the atmospheric layers and the underlying surface, partly returned to space. The atmospheric layers and the underlying surface radiate in the long-wave range. In general, the absorption coefficient and heat capacity are specific for the atmospheric layers and are everywhere positive. In the model, the radiation balance of a segment of the atmospheric column above a unit area of the underlying surface determines the change in the internal energy and the volume occupied by the segment.The pressure value of small segment always remains equal to the weight of a part of the atmospheric column above the segment (hydrostatic hypothesis). The underlying surface is always in the state of radiation equilibrium. Under these assumptions: a) there is a single equilibrium vertical temperature distribution in the column and corresponding air pressure and density distributions (they are calculated using the hydrostatic assumption and the equation of a state of the ideal gas); b) the temperature distribution is asymptotically stable, i.e. any other initial distribution of non-negative temperature values tends with time to equilibrium uniformly on the vertical. Thus, one can expect that the numerical analogs of the model considered in this work will also be stable, which is important for the computational implementation of both the one-dimensional model and its three-dimensional version.

Keywords. Dry atmosphere, one-dimensional model, hydrostatic hypothesis, equilibrium state, asymptotic stability.

References

Belov P.N. 1975. *Chislennyye metody prognoza pogody* [Numerical methods for weather forecasting]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 392 p.

Integral'nyye uravneniya [Integral equations]. Zabreyko P.P., Koshelev A.I., Krasnosel'skiy M.A., Mikhlin S.G., Rakovshchik L.S., Stetsenko V.YA. 1968. Moskva. Nauka, 448 p.

Krasnosel'skiy M.A. 1962. *Polozhitel'nyye resheniya operatornykh u/ravneniy: Glavy nelineynogo analiza* [Positive solutions of operator equations]. Moskva. Fizmatgiz, 394 p.

Nigmatulin R.I. 2018. Uravneniya gidro- i termodinamiki atmosfery pri malykh silakh inertsii po sravneniyu s siloy tyazhesti [Equations of hydro- and thermodynamics of the atmosphere at low inertial forces in comparison with the force of gravity]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Applied mathematics and mechanics,* vol. 82, issue 4, pp. 472-484, DOI 10.31857/S003282350000205-5.

Pozitivnyye lineynyye sistemy: Metod polozhitel'nykh operatorov [Positive linear systems: The method of Positive Operators] M. A. Krasnosel'skiy, Ye. A. Lifshits, A.V. Sobolev, red. 1985. Moscow. Nauka, 255 p.

Fridman A.A. 1966. *Izbrannyye trudy* [Selected work] (prof. L.S. Polak, red.). Izdatel'stvo «Nauka», 462 p.

Friedmann A.A. 1914. Zur Theorie der Vertikaltemperatureverteilung. – Mereorol. Z., vol. 31, pp. 154-156.

Semenov S.M., Popov I.O. 2011. Comparative Estimates of Influence of Changes in Carbon Dioxide, Methane, Nitrous Oxide, and Water Vapor Concentrations on Radiation-Equilibrium Temperature of Earth’s Surface. – Russian Meteorology and Hydrology, vol. 36, No. 8, pp. 520-526, DOI 10.3103/S1068373911080036.