Уравнения умнее тех, кто их вывел.

Генрих Герц (1857-1894)

Квазистатическое приближение для климатической или метеорологической моделей атмосферы

Р.И. Нигматулин

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. Ломоносова **Механико-математический факультет**	**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК** **Институт океанологии им П.П. Ширшова**

ИНСТИТУТ ГЛОБАЛЬНОГО КЛИМАТА И ЭКОЛОГИИ

Москва, 25 мая 2017 г.

Гидротермодинамические уравнения для атмосферы

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

–уравнение сохранения массы

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) + f_x^{(cor)}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) + f_y^{(cor)}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + f_z^{(cor)} - g$$

- уравнения сохранения импульса

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q^*}{\rho c_v} + \frac{p}{\rho^2 c_v}\frac{d\rho}{dt}$$

– уравнение притока тепла

$$Q^* \equiv -\frac{\partial q}{\partial z} + Q - J^{(e)} l^{(e)}$$

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Уравнения состояния совершенного газа

$$p = R\rho T \qquad u = c_v T + \text{const} \qquad c_v = R/(\gamma - 1)$$

ВЛАГОСОДЕРЖАНИЕ

$$\rho = \rho_A + \rho_W \qquad \rho_W = \rho_{WG} + \rho_{WL}$$

Сухой воздух-Air   Вода-Water   Пар- Gas   Капли-Liquid

Температурный ресурс влаги за счет испарения и конденсации

$$\rho_W \ll \rho \quad \left(\frac{\rho_W}{\rho} \sim 10^{-3}\right) \Rightarrow \quad \rho_W l^{(e)} / \rho c_p = 2{,}3\ \mathrm{K}, \qquad \rho_W l^{(m)} / \rho c_p = 0{,}34\ \mathrm{K}$$

Уравнение сохранения массы пара (газа)

$$\frac{\partial \rho_G}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_G v_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho_G v_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho_G \left(v_z + w_{WG}\right)}{\partial z} + J^{(e)}$$

$$v_{WGx} = v_x, \quad v_{WGy} = v_y, \quad v_{WGz} = v_z + w_{WG}$$

Турбулентная диффузия

$$w_{WG} = -\nu^{(d)} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_{WG}}{\rho}\right)$$

$$\rho_A w_A = -\rho_{WG} w_{WG}$$

Уравнение сохранения массы капель

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_L v_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho_L v_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho_L \left(v_z + w_{WL}\right)}{\partial z} - J^{(e)}$$

$$v_{WLx} = v_x, \quad v_{WLy} = v_y, \quad v_{WLz} = v_z + w_{WL}$$

Осаждение капель

$$\lambda_A \frac{\rho w_{WL}^2}{2} \frac{\pi d^2}{4} = \rho_L^\circ \frac{\pi d^3}{6} g$$

$$\lambda_A = \lambda_A(\mathrm{Re}), \qquad \mathrm{Re} = \frac{\rho w_{WL} d}{\mu_m}$$

Аэродинамическое сопротивление

ДЛЯ ЗАМЫКАНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЯ НЕОБХОДИМЫ УРАВНЕНИЯ:

- для вертикального теплового потока q (турбулентная теплопроводность).

- для выделения тепла из-за поглощения радиации Q, определяемого уравнениями для потоков коротковолновой радиации G, длинноволновой радиации U.

- для интенсивности испарения (конденсации и образования льда или снега) $J^{(e)}$ и тепла $J^{(e)}l^{(e)}$ фазовых переходов.

Три тождественные формы записи уравнения притока тепла для совершенного газа

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = Q^* + \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$\frac{d(\rho T)}{dt} - T\frac{d\rho}{dt} = \frac{Q^*}{c_v} + \frac{p}{c_v \rho}\frac{d\rho}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dt} - RT\frac{d\rho}{dt} = \frac{R}{c_v}Q^* + \frac{R}{c_v}\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\gamma p}\frac{dp}{dt} - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{Q^*}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = Q^* + \frac{dp}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

КЛИМАТИЧЕСКИЕ и МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЕ МАСШТАБЫ

$\tau > 10^2$ s

$V_{\text{hor}} < 30$ m/s, $L_{\text{hor}} \sim V_{\text{hor}}\tau > 10^3$ m

$V_{\text{ver}} < 3$ m/s, $L_{\text{ver}} \sim V_{\text{ver}}\tau > 10^2$ m

КЛИМАТ, ПОГОДА

$\tau \sim 10^0$ s

$V_{\text{hor}} \sim 10^2$ m/s, $L_{\text{hor}} \sim 10^2$ m,

$V_{\text{ver}} \sim 30$ m/s, $L_{\text{ver}} \sim 10^2$ m,

ТАЙФУН, ШТОРМ, БОРА

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \sim \frac{\partial v_y}{\partial t} \sim \frac{V_{\text{hor}}}{\tau} \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} \sim \frac{V_{\text{ver}}}{\tau}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{V_{\text{hor}}}{L_{\text{hor}}}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} \sim \frac{\partial v_z}{\partial y} \sim \frac{V_{\text{ver}}}{L_{\text{hor}}} \qquad \frac{\partial v_z}{\partial z} \sim \frac{V_{\text{ver}}}{L_{\text{ver}}}$$

$$\bar{t} \equiv \frac{t}{\tau}, \quad \bar{x} \equiv \frac{x}{L_{\text{hor}}}, \quad \bar{y} \equiv \frac{y}{L_{\text{hor}}}, \quad \bar{z} \equiv \frac{z}{L_{\text{ver}}},$$

$$\bar{v}_x \equiv \frac{v_x}{V_{\text{hor}}}, \quad \bar{v}_y \equiv \frac{v_x}{V_{\text{hor}}}, \quad \bar{v}_z \equiv \frac{v_z}{V_{\text{ver}}} \quad = O(1)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{V_{\text{hor}}}{\tau}\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{z}}\right) = A_{\text{hor}} \frac{\mathrm{d}\bar{v}_x}{\mathrm{d}\bar{t}} \quad = A_{\text{hor}} O(1)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{V_{\text{hor}}}{\tau}\left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{z}}\right) = A_{\text{hor}} \frac{\mathrm{d}\bar{v}_y}{\mathrm{d}\bar{t}} \quad = A_{\text{hor}} O(1)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{V_{\text{ver}}}{\tau}\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{y}} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}}\right) = A_{\text{ver}} \frac{\mathrm{d}\bar{v}_z}{\mathrm{d}\bar{t}} \quad = A_{\text{ver}} O(1)$$

$$\left|-\mathbf{a}^{(\text{cor})}\right| = f^{(\text{cor})} = \left|\mathbf{f}^{(\text{cor})}\right| = \left|2\left[\vec{\boldsymbol{\Omega}} \times \vec{\mathbf{v}}\right]\right| = 2V_{\text{cor}}\Omega\left|\left[\vec{\mathbf{e}}_{\text{o}} \times \vec{\bar{\mathbf{v}}}\right]\right|$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{24\ \text{час}} \approx 0{,}727 \times 10^{-4}\ \text{c}^{-1}, \qquad A_{\text{cor}} = 2V_{\text{cor}}\Omega$$

Безразмерные функции $\left(\bar{v}_i,\ \frac{d\bar{v}_i}{d\bar{t}}\right) = O(1)$

Масштабы ускорений

$$A_{\text{hor}} = \frac{V_{\text{hor}}}{\tau} = \frac{V_{\text{hor}}^2}{L_{\text{hor}}} < 10^{-1}\text{м / с}^2,$$

$$A_{\text{ver}} = \frac{V_{\text{ver}}}{\tau} = \frac{V_{\text{ver}}^2}{L_{\text{verr}}} < 10^{-2}\text{м / с}^2,$$

$$A_{\text{cor}} = 2\Omega V_{\text{hor}} < 1{,}4 \times 10^{-3}\text{м / с}^2$$

$$\varepsilon = \left(\frac{A_{\text{hor}}}{g},\ \frac{A_{\text{ver}}}{g},\ \frac{A_{\text{cor}}}{g}\right) < \left(10^{-2},\ 10^{-3},\ 10^{-4}\right)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{A_{\text{hor}}}{g},\ \frac{A_{\text{ver}}}{g},\ \frac{A_{\text{cor}}}{g}\right) \rightarrow 0$$

УРАВНЕНИЯ МПУЛЬСА

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho O\left(A_{\mathrm{hor}} + A_{\mathrm{cor}}\right) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho O\left(A_{\mathrm{hor}} + A_{\mathrm{cor}}\right) \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g\left(1 + O(\varepsilon)\right)$$

или в другом тождественном виде

$$\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} = O(\varepsilon) \qquad \frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial y} = O(\varepsilon) \qquad \frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial z} = -1 + O(\varepsilon)$$

$$p(t,x,y,z) = g\,M\left(1 + O(\varepsilon)\right)$$

$$M(t,x,y,z) = \int_z^{\infty} \rho(t,x,y,z')\,\mathrm{d}z' \approx \int_z^{H} \rho(t,x,y,z')\,\mathrm{d}z'$$

Как рассчитать вертикальную скорость v_z ?

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ПОТОКИ. Дождь (фото с борта самолета)

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ПОТОКИ. **Образование грозы (фото с борта самолета на высоте 11 000 м).**

УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \mathrm{div}\,\mathbf{v} \equiv -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

Уравнение для распределения вертикальной скорости по вертикали

ОКЕАН: $\Delta\rho/\rho \sim 10^{-4}$ - 10^{-3}

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_{S,T}\frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{p,T}\frac{dS}{dt} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{S,T}\frac{dT}{dt} \ll \left|\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial z}\right|$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \cancel{\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_z}{\partial \boldsymbol{z}} = -\frac{\partial \boldsymbol{v}_x}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_y}{\partial \boldsymbol{y}}$$ - Квазинесжимаемость

Обыкновенное дифференциальное уравнение для распределения вертикальной скорости по вертикали в океане

Атмосфера: Δρ/ρ ~ 10⁰

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \frac{\gamma-1}{\gamma p}Q^*}$$

- уравнение притока тепла для совершенного газа

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \underbrace{- \frac{1}{\gamma p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\gamma-1}{\gamma p}Q^*}$$

$$v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} \ll v_z \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\boldsymbol{t}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}} \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v_z} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{z}} + v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{z}} = -g\rho$$

$$\underbrace{\left\{ g \int_z^H \rho \, dz' \right\}}_{p}$$

$$-\boldsymbol{v_z}\, \boldsymbol{g}\rho$$

$$\frac{dp}{dt} = g \int_z^H \frac{\partial \rho}{\partial t} dz' - g\rho v_z$$

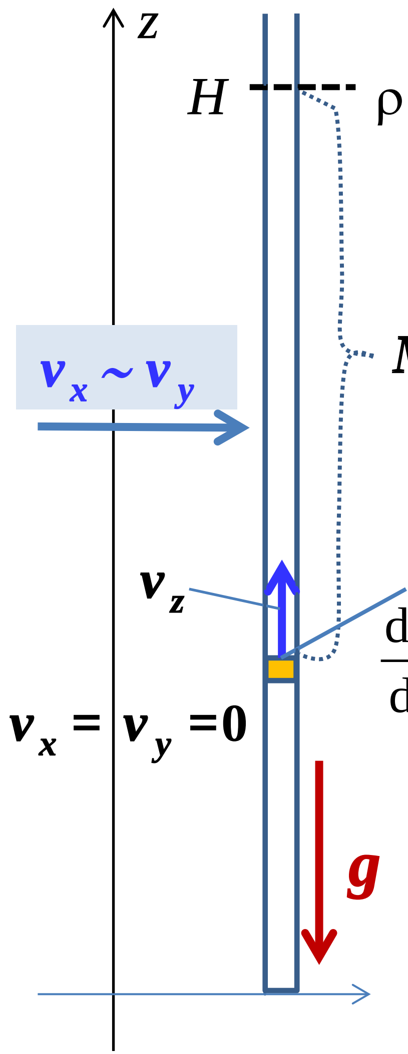
$$-g \int_z^H (\mathrm{div}\rho\mathbf{v}) \, dz' = g \int_z^H \left(-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dz' = -g \int_z^H \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \right) dz' + g\rho v_z$$

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = -g \int_z^H \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \right) dz'}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\,g\int_z^H \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}z'}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\,g\rho v_z}$$

Учебник Дж. Холтона “Введение в динамическую океанологию” (2004)



$M(z) =$

Г.И. Марчук (1976) принял

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

чтобы «отфильтровать акустику» ???

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{t}} + \underbrace{\boldsymbol{v}_z \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{z}}}_{-g\rho v_z}$$

$$\mathbf{0}$$

Это принципиальная погрешность

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\,g\int_z^H \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}z'$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0, \text{ but not } \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -g\rho v_z$$

Должно быть

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = g\int_z^H \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}z' - g\rho v_z = \left\{ \underbrace{-g\int_z^H \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}z'}_{\sim\, g\tilde{\rho}\frac{V_{\mathrm{hor}}}{L_{\mathrm{hor}}}(H-z) \,\sim\, g\tilde{\rho}\frac{10^1}{10^5}10^4 \,\sim\, g\rho v_z} + \cancel{g\rho v_z} \right\} \cancel{-\,g\rho v_z}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = g\dot{\boldsymbol{M}} \equiv -g\int_z^H \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}z'$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{\gamma p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\gamma - 1}{\gamma\, p} Q^*$$

$$p = g\boldsymbol{M} \equiv g\int_z^H \rho(t, x, y, z')\,\mathrm{d}z'$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}}$$

- Г.И. Марчук

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{v}_z}{\partial \boldsymbol{z}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_x}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_y}{\partial \boldsymbol{y}}\right) - \frac{1}{\gamma}\frac{\dot{\boldsymbol{M}}}{\boldsymbol{M}} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\boldsymbol{Q}^*}{\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{M}}}$$

$$\left(M = \int_z^H \rho(t, x, y, z')\,\mathrm{d}z', \quad \dot{M} \equiv -\int_z^H \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}z' = \frac{\partial M}{\partial t} - \rho v_z \right)$$

$$M(z - \Delta z) = M(z) + \rho(z)\cdot\Delta z, \qquad \dot{M}(z - \Delta z) = \dot{M}(z) - \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right)\Delta z$$

Edwards Lorentz (1967)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_z}{\partial \boldsymbol{z}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_x}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{v}_y}{\partial \boldsymbol{y}}\right) - \frac{1}{\gamma}\frac{\dot{\boldsymbol{M}}}{\boldsymbol{M}} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\boldsymbol{Q}^*}{\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{M}} + \left\{\frac{1}{\gamma p}\left(v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\}$$

$$\frac{\left\{v_x\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + v_y\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right\} / \gamma p}{\dot{M} \;/\; \gamma M} =$$

$$\left(v_x \frac{\partial p}{\partial x},\; v_y \frac{\partial p}{\partial y}\right) = V_{\mathrm{hor}}\,\rho\,O\left(A_{\mathrm{hor}} + A_{\mathrm{cor}}\right) = V_{\mathrm{hor}}\,\rho\,O\left(\frac{V_{\mathrm{hor}}^2}{L_{\mathrm{hor}}} + \frac{V_{\mathrm{hor}}^2}{L_{\mathrm{cor}}}\right)$$

$$\frac{\dot{M}}{\gamma M} = \frac{\int_z^H \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right) \mathrm{d}z'}{\gamma \int_z^H \rho\left(t, x, y, z'\right) \mathrm{d}z'} \sim \frac{\frac{\hat{\rho} V_{\mathrm{hor}}\left(H - z\right)}{L_{\mathrm{hor}}}}{\gamma \tilde{\rho}\left(H - z\right)} = O\left(\frac{V_{\mathrm{hor}}}{L_{\mathrm{hor}}}\right)$$

$$\frac{\overbrace{\left\{ v_x \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \right\}}^{V_{\mathrm{hor}}\,\rho\, O\left(\frac{V_{\mathrm{hor}}^2}{L_{\mathrm{hor}}} + \frac{V_{\mathrm{hor}}^2}{L_{\mathrm{cor}}} \right)} \Big/ \gamma p}{\underbrace{\dot{M} \;/\; \gamma M}_{O\left(\frac{V_{\mathrm{hor}}}{L_{\mathrm{hor}}} \right)}} = \frac{\dfrac{V_{\mathrm{hor}}\rho}{\gamma p} O\left(\dfrac{V_{\mathrm{hor}}^2}{L_{\mathrm{hor}}} + \dfrac{V_{\mathrm{hor}}^2}{L_{\mathrm{cor}}} \right)}{O\left(\dfrac{V_{\mathrm{hor}}}{L_{\mathrm{hor}}} \right)} =$$

$$= \frac{L_{\mathrm{hor}}}{C^2} O\left(\frac{V_{\mathrm{hor}}^2}{L_{\mathrm{hor}}} + \frac{V_{\mathrm{hor}}^2}{L_{\mathrm{cor}}} \right) = \frac{V_{\mathrm{hor}}^2}{C^2} L_{\mathrm{hor}} O\left(\frac{1}{L_{\mathrm{hor}}} + \frac{1}{L_{\mathrm{cor}}} \right) = \left(1 + \frac{L_{\mathrm{hor}}}{L_{\mathrm{cor}}} \right) O\left(\mathbf{M}^2 \right)$$

$$\left(\mathbf{M} \equiv \frac{V_{\mathrm{hor}}}{C}, \qquad C = \left(\frac{\gamma p}{\rho} \right)^{1/2} = 300 \; - \; 350 \text{ м / с} \right)$$

$$\varepsilon$$

$$\mathbf{M}^2 = \frac{V_{\mathrm{hor}}^2}{C^2} = \frac{L_{\mathrm{hor}}\, g}{C^2} \times \frac{V_{\mathrm{hor}}^2}{g L_{\mathrm{hor}}} = \frac{L_{\mathrm{hor}}\, g}{C^2} \times \varepsilon$$

$$\boxed{\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{\gamma}\frac{\dot{M}}{M} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\left(-\frac{Jl}{p} + \frac{Q}{p} - \frac{1}{p}\frac{\partial q}{\partial z}\right)}$$

Оценки для режима с $V_{\text{hor}} \sim 10$ м / с, $L_{\text{hor}} \sim 10^5$ м, $\tau \sim 10^4$ с

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{V_{\text{hor}}}{L_{\text{hor}}} \sim 10^{-4}\ \text{s}^{-1} \qquad \frac{\dot{M}}{\gamma M} \sim \frac{V_{\text{hor}}}{L_{\text{hor}}} \sim 10^{-4}\ \text{s}^{-1}$$

$\nu^{(\text{T})} < 10^3\ \text{m}^2\ /\ \text{s}$, $c_{\text{p}} = 1000\ \text{m}^2\ /\ \text{s} \cdot \text{К}$, $\gamma = 1{,}4$, $l = 2 \times 10^6\,\text{m}^2/\text{s}^2$,

$$J\,l \sim \frac{10^{-2}\rho l}{\tau}, \qquad \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{J\,l}{p} \sim \frac{10^{-2}\rho l}{\tau} \sim 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$$

$$Q \sim \frac{\rho c_{\text{p}}\,\delta T}{\tau}, \qquad \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{Q}{p} \sim \frac{\delta T}{T\tau} \sim \frac{1}{3}\cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1} \qquad (\delta T \sim 10\ \text{К})$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} \sim \frac{\nu^{(\text{T})}\rho c_{\text{v}}\,\Delta T_{\text{ver}}}{L_{\text{ver}}^2}, \qquad \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{1}{p}\frac{\partial q}{\partial z} \sim \frac{\nu^{(\text{T})}\,\Delta T_{\text{ver}}}{L_{\text{ver}}^2 T} \sim \frac{1}{3}\cdot 10^{-7}\,\text{s}^{-1} \qquad (\Delta T_{\text{ver}} \sim 10^2\ \text{К})$$

$$\boxed{\Delta v_z \sim \frac{\partial v_z}{\partial z} L_{\text{ver}} \sim 10^{-4} \times 10^4 \sim 10^0\ \text{m}\ /\ \text{s}}$$

Уравнения сохранения для атмосферы с вертикальной квазистатикой (относительно T, v_x, v_y)

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v_x\frac{\partial T}{\partial x} - v_y\frac{\partial T}{\partial y} - v_z\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{Q^*}{\rho c_p} + g\overset{\frac{dp}{dt}}{\overbrace{\dot{M}}} \qquad Q^* \equiv -\frac{\partial q}{\partial z} + Q - J\,l$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) + f_x^{(\mathrm{cor})}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} - v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) + f_y^{(\mathrm{cor})}$$

$$\frac{\partial p_h}{\partial t} = g\dot{M}_h + g\rho v_{zh} \qquad \left(\dot{M}_h \equiv \dot{M}(t,x,y,h),\quad v_{zh} \equiv v_z(t,x,y,h),\quad p_h \equiv p\left(t,x,y,h\right)\right)$$

$$p(t,x,y,z) = p_h(t,x,y)\exp\left(-\frac{g}{R}\int_h^z \frac{dz'}{T(t,x,y,z')}\right), \qquad \rho = \frac{p}{RT},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \dot{M}}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \qquad \left(M = \frac{p}{g} = \int_z^H \rho(t,x,y,z')\,dz',\quad \dot{M} \equiv -\int_z^H\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right)dz'\right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{\gamma}\frac{\dot{M}}{M} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{Q^*}{g\,M}$$

$$(\otimes)$$

Уравнения сохранения для атмосферы с вертикальной квазистатикой (относительно ρ, v_x, v_y)

$$\frac{\partial}{\partial t}:\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v_x\frac{\partial \rho}{\partial x} - v_y\frac{\partial \rho}{\partial y} - v_z\frac{\partial \rho}{\partial z} + \underbrace{\frac{1}{\gamma}\frac{\rho \dot{M}}{M} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho Q^*}{gM}}_{-\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}} \qquad Q^* \equiv -\frac{\partial q}{\partial z} + Q - J\,l \\
&\frac{\partial v_x}{\partial t} = -v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) + f_x^{(\mathrm{cor})} \\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} = -v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} - v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) + f_y^{(\mathrm{cor})}
\end{aligned}\right.$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\frac{\partial M}{\partial x} = g\int_z^H \frac{\partial \rho}{\partial x}\mathrm{d}z' \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = g\frac{\partial M}{\partial y} = g\int_z^H \frac{\partial \rho}{\partial y}\mathrm{d}z'$$

$$\frac{\partial}{\partial z}:\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial M}{\partial z} = -\rho \\
&\frac{\partial \dot{M}}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \\
&\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{\gamma}\frac{\dot{M}}{M} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Q^*}{g\,M}
\end{aligned}\right.$$

$$p = gM, \qquad T = \frac{g}{R}\frac{M}{\rho} \qquad \left(M = \int_z^H \rho(t,x,y,z')\,\mathrm{d}z', \qquad \dot{M} \equiv -\int_z^H \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}z'\right)$$

$$(\otimes')$$

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Гео- и квазигеострофические модели

$$t=0:\ T\left(0,x,y,z\right)=T^{(0)}(x,y,z),\quad \cancel{v_x=v_x^{(0)}(x,y,z),\quad v_y=v_y^{(0)}(x,y,z)}$$

$$p\left(0,\ x,y,h\right)=p_h^{(0)}\left(x,y\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} p\left(0,x,y,z\right)=p_h^{(0)}\left(x,y\right)\exp\left(-\dfrac{g}{R}\displaystyle\int_h^z\dfrac{\mathrm{d}z'}{T^{(0)}\left(x,y,z'\right)}\right) \\ \rho\left(0,x,y,z\right)=\dfrac{p\left(0,x,y,z\right)}{R\,T\left(0,x,y,z\right)} \end{array}\right)$$

Схема распределения параметров в тропосфере над межфазной поверхностью

МЕЖФАЗНАЯ ГРАНИЦА

ξ - поток испаряющейся массы на нижней границе атмосферы

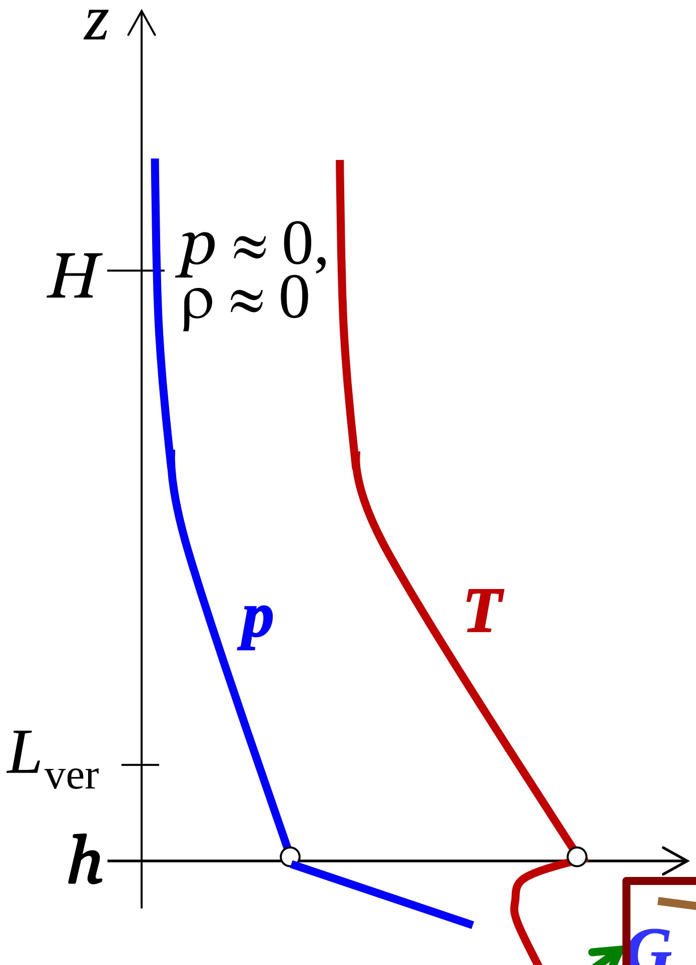
$\xi l^{(e)}$ - поток энергии испарения

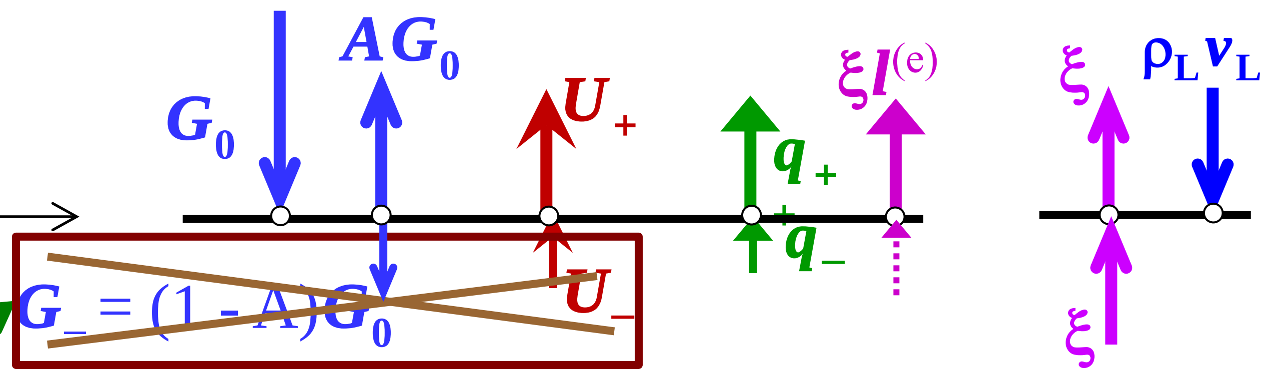
$\rho_L v_L$ – дождевой (снежный) поток

q - поток тепла

G - коротковолновая солнечная радиация

U - длинноволновое тепловое излучение





НЕПРОЗРАЧНАЯ (твердая) фаза:
$G_- = U_- = 0$

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

$$z = H(t):\quad p \approx 0,\quad \rho \approx 0,\quad \dot{M} \approx 0,\quad \frac{\partial H}{\partial t} = v_z(t, x, y, H)$$

$$z = h(x, y):\; v_z \equiv v_{zh} = v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\xi}{\rho},$$

$$p \equiv p_h,\quad \frac{\partial p_h}{\partial t} = -g\dot{M}_h + g\rho v_{zh} \qquad \left(\dot{M}_h \equiv -\int_h^H \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right) \mathrm{d}z'\right)$$

$$q_- - q_+ + (1-A)G \boxed{\cancel{-G_- + U_-}} - U_+ = \xi l$$

Непрозрачная фаза

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\varepsilon_{\mathrm{ver}} = \frac{A_{\mathrm{ver}}}{g}, \quad \varepsilon_{\mathrm{hor}} = \frac{A_{\mathrm{hor}}}{g}, \quad \varepsilon_{\mathrm{cor}} = \frac{A_{\mathrm{cor}}}{g}, \quad \varepsilon_{\mathrm{C}} = \mathbf{M}^2 \right)$$

$$\left(A_{\mathrm{ver}} = \frac{V_{\mathrm{ver}}}{\tau} + \frac{V_{\mathrm{ver}}^2}{L_{\mathrm{ver}}}, \quad A_{\mathrm{hor}} = \frac{V_{\mathrm{hor}}}{\tau} + \frac{V_{\mathrm{hor}}^2}{L_{\mathrm{hor}}}, \quad A_{\mathrm{cor}} = \frac{V_{\mathrm{hor}}}{\tau_{\mathrm{cor}}}, \quad \mathbf{M}^2 = \frac{V_{\mathrm{ver}}^2}{C^2} \right)$$

Теорема. Уравнения (⊗) асимптотически точные уравнения для

$$\varepsilon_{\mathrm{ver}} \to 0, \qquad \varepsilon_{\mathrm{hor}} \to 0, \qquad \varepsilon_{\mathrm{cor}} \to 0, \qquad \varepsilon_{C} \to 0$$

ОБОСТРЕНИЯ !!!

Уравнения сохранения для атмосферы с вертикальной квазистатикой (относительно ρ, v_x, v_y)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} = -v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} - v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} - v_z\frac{\partial\rho}{\partial z} + \underbrace{\frac{1}{\gamma}\frac{\rho\dot{M}}{M} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho Q^*}{gM}}_{-\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}} \qquad Q^* \equiv -\frac{\partial q}{\partial z} + Q - J\,l\\
&\frac{\partial v_x}{\partial t} = -v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right) + f_x^{(\mathrm{cor})}\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} = -v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} - v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right) + f_y^{(\mathrm{cor})}
\end{aligned}\right.$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\frac{\partial M}{\partial x} = g\int_z^H \frac{\partial\rho}{\partial x}\mathrm{d}z' \qquad \cancel{\frac{\partial p}{\partial x} = C^2\frac{\partial\rho}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = g\frac{\partial M}{\partial y} = g\int_z^H \frac{\partial\rho}{\partial y}\mathrm{d}z' \qquad \cancel{\frac{\partial p}{\partial y} = C^2\frac{\partial\rho}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial M}{\partial z} = -\rho\\
&\frac{\partial\dot{M}}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\\
&\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{\gamma}\frac{\dot{M}}{M} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Q^*}{g\,M}
\end{aligned}\right.$$

$$p = gM, \qquad T = \frac{g}{R}\frac{M}{\rho} \qquad \left(M = \int_z^H \rho(t,x,y,z')\,\mathrm{d}z', \qquad \dot{M} \equiv -\int_z^H\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}z'\right)$$

$$(\otimes')$$

1. **В дифференциальном операторе системы уравнений квазистатического по вертикали движения нет скорости звука C, даже в уравнениях горизонтального движения,**

т.е. «акустика отфильтрована» (выражение Г.И. Марчука).

Поэтому в конечно-разностных схемах для уравнений в квазистатическом по вертикали приближении

- нет акустического условия Куранта для вертикального направления

$$\Delta t < K_C \frac{\Delta z}{C}$$

- нет акустического условия Куранта и для горизонтального направления

$$\Delta t < K_C \frac{\Delta x}{C}, \quad K_C \frac{\Delta y}{C}$$

2. **Система уравнений (⊗) негиперболична ($C \to \infty$) даже при отсутствии теплопроводности, т.е. при отсутствии параболическо-го члена**

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_k}\left(\lambda \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right)$$

Негиперболичность приводит к **некорректной** (ill posed) постановке задачи Коши, при которой **коротковолновые** возмущения

$$\delta W_k\big|_{t=0} = A(k)\left[\sin(kx)\right] \qquad \text{при } k \to \infty$$

растут неограниченно быстро:

$$\delta W = A(k) \times \exp\left(\omega_{**}(k)t\right)\left[\sin(kx)\right], \qquad \omega_{**}(k) \underset{k\to\infty}{\to} \infty$$

$L_* = \dfrac{p_0}{\rho_0 g} \sim H \sim 10^4\text{м}$ - **линейный размер, следующий из дифференциального оператора и начальных условий**

$k_* \approx \dfrac{2\pi}{L_*} = \dfrac{2\pi\rho_0 g}{p_0}$ - **характерное волновое число метеорологического процесса**

Конечно-разностная схема **генерирует «паразитные»** коротковолновые возмущения с волновым числом

$$k \approx \frac{2\pi}{\Delta z} \ \text{и} \ \frac{2\pi}{\Delta x}$$

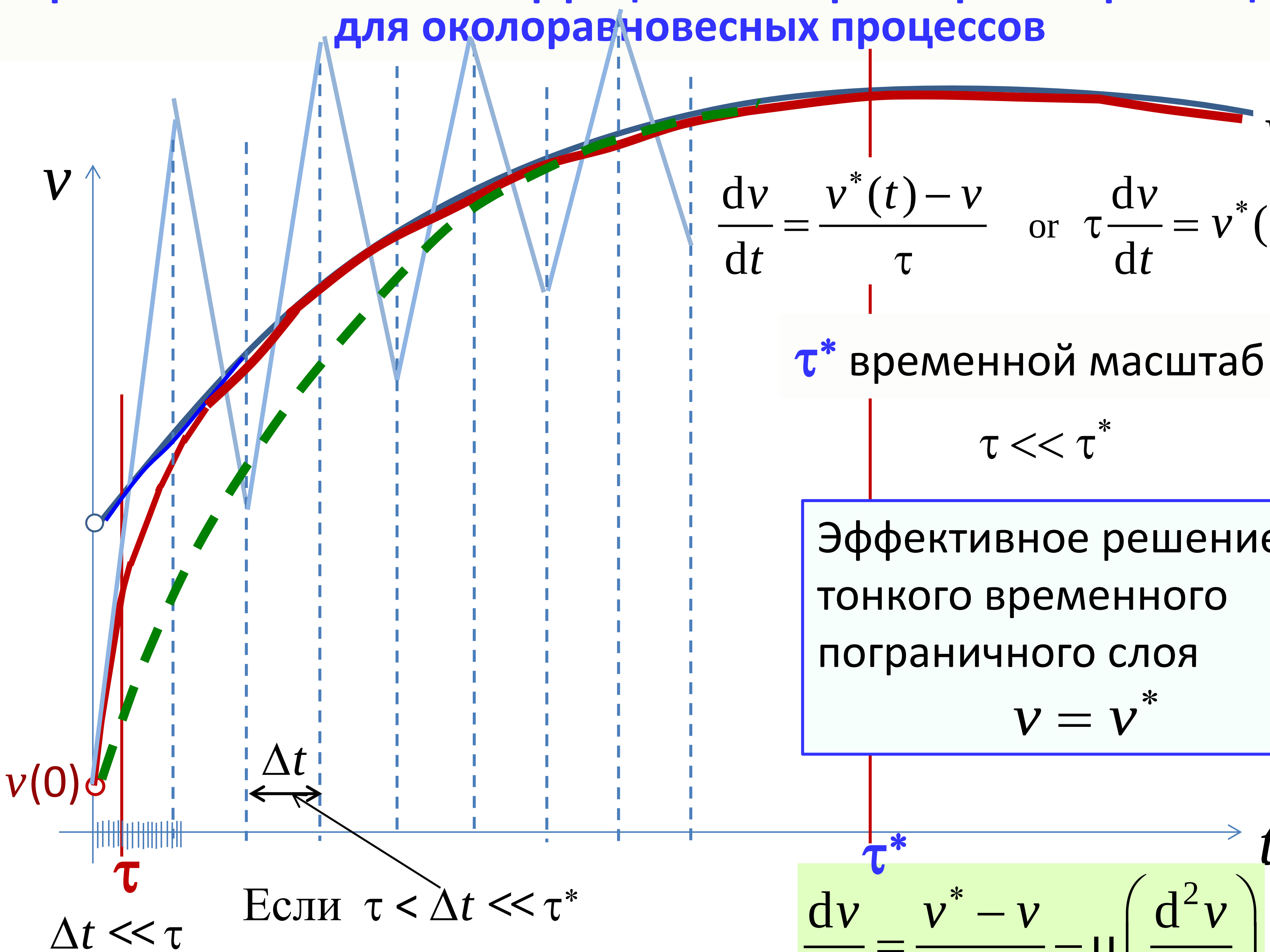
$$\text{если} \quad k \approx \left(\frac{2\pi}{\Delta z} \ \text{или} \ \frac{2\pi}{\Delta x}\right) >> k_* = \frac{2\pi\rho_0 g}{p_0}, \ \text{то} \quad \omega_{**}\tau >> 1, \quad \exp\left(\omega_{**}(k)\tau\right) >> 1$$

Необходим фильтр (численная диссипация) для возмущений типа

$$A(k) \times \sin(kx) \ \text{при} \quad k\,\Delta x > 1$$

$$A(k) \to 0 \qquad \text{при } k \to \infty$$

Уравнения с малым коэффициентом при старшей производной для околоравновесных процессов



$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^*(t) - v}{\tau} \quad \text{or} \quad \tau\frac{dv}{dt} = v^*(t) - v$$

τ^* временной масштаб v^*

$$\tau \ll \tau^*$$

Эффективное решение вне тонкого временного пограничного слоя

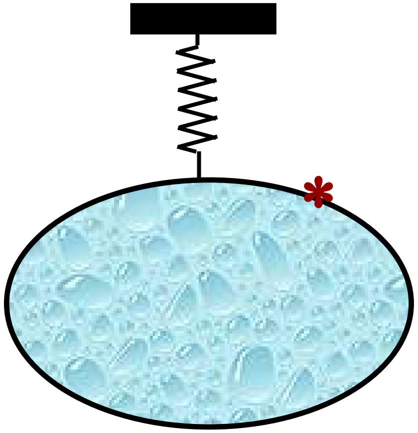
$$v = v^*$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^* - v}{\tau} - \mu\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)$$

“ГЛУПЫЙ МЕТОД” ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕСА МУХИ *

(m(f) ~ 10^{-1} g) используя тело массы m(B) ~ 10^4 g

1. Взвесить тело без мухи: m(B) ~ 10^4 g



2. Взвесить тело с мухой: m(B + f) ~ 10^4 g

3. Затем m(f) = m(B + f) – m(B)

Масштабы для шторма, тайфуна и боры

$\tau \sim 10^0$ s

$V_{\text{hor}} \sim 10^2$ m/s, $L_{\text{hor}} \sim 10^2$ m,

$V_{\text{ver}} \sim 10$ m/s, $L_{\text{ver}} \sim 10^2$ m,

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} \sim \frac{V_{\text{ver}}}{\tau} = 10^1 \text{м / с}^2$$

$$v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} \sim v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} \sim V_{\text{hor}} \frac{V_{\text{ver}}}{L_{\text{hor}}} = 10^1 \text{м / с}^2$$

$$v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \sim V_{\text{ver}} \frac{V_{\text{ver}}}{L_{\text{ver}}} = 10^0 \text{ м / с}^2$$

Эти вертикальные силы инерции могут быть сравнимыми с ускорением силы тяжести $g \approx 10$ м/с^2

АКУСТИКА

$$V_z \sim 10^0 \text{ м / с}, \quad \omega > 10^3 \text{с}^{-1},$$

$$C \sim 300 \text{ м / с}, \quad L_{\text{ver}} \sim C / \omega < 0,3 \text{ м}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} \sim \frac{V_z}{\omega^{-1}} > 10^3 \text{ м / с}^2 >> g \approx 10 \text{ м / с}^2$$

$$v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \sim V_z \frac{V_z}{C / \omega} > 3 \text{ м / с}^2$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \cancel{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{g}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Луна и Земля

Снимок с борта Discovery 16.07.15 из точки Лагранжа (1,5 млн км от Земли).

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ !

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

$$\Delta E_{\text{Atm}} = G_{\text{Sun}} - U_{\text{Space}} + Q_{\text{Earth}}\ , \qquad Q_{\text{Earth}} << G_{\text{Sun}} - U_{\text{Space}}$$

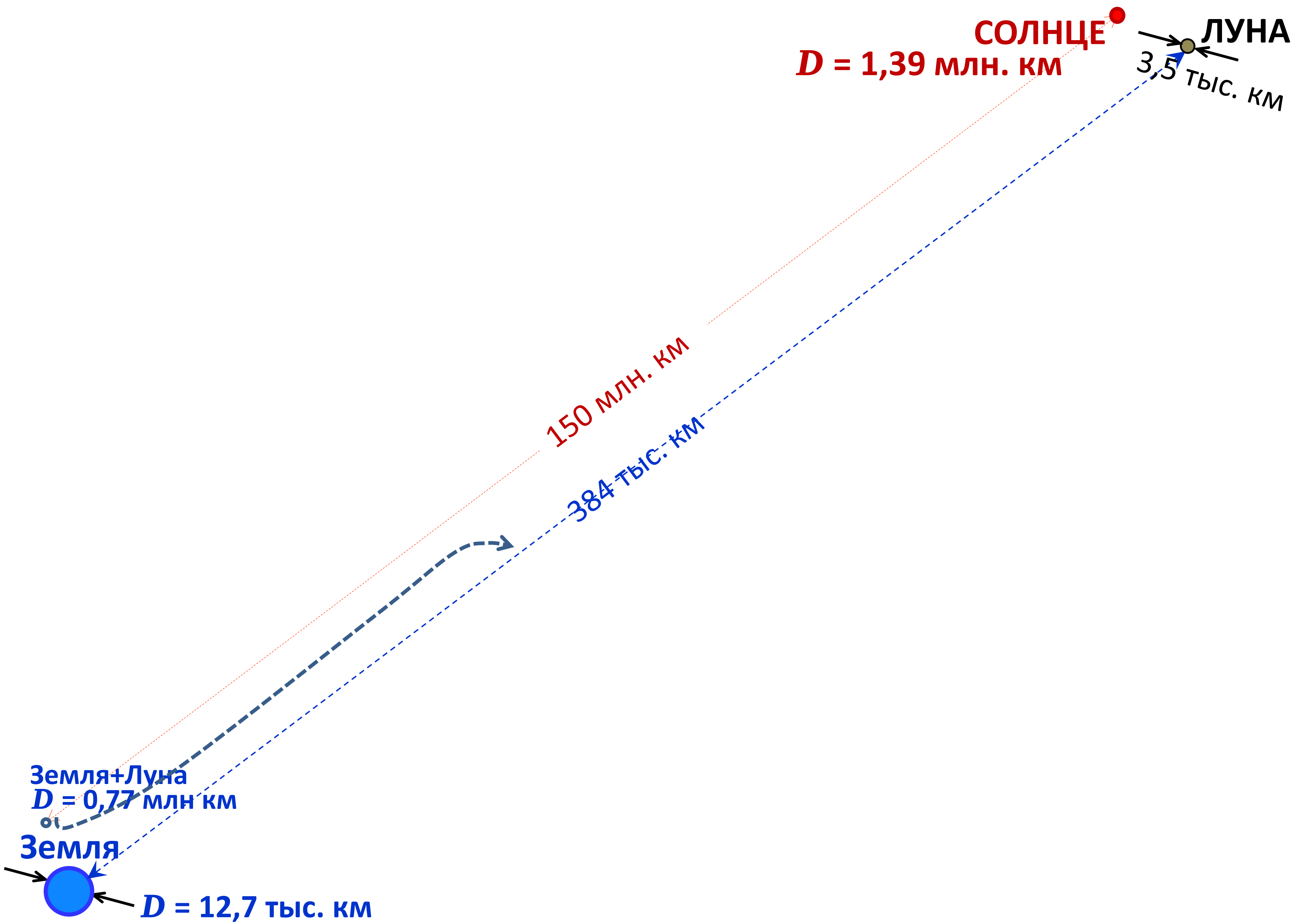
$$E_{\text{Atm}} = e_{\text{Atm}} + k_{\text{Atm}}$$

$$e_{\text{Atm}} = \int\limits_{V_{\text{Atm}}} \rho c_V T \, \mathrm{d}V \qquad c_V \approx 700 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K})$$

$$k_{\text{Atm}} = \int\limits_{V_{\text{Atm}}} \rho \frac{(v')^2}{2} \mathrm{d}V = k_{\text{Atm}}^{\text{turb}} + \int\limits_{V_{\text{Atm}}} \rho \frac{(v_{\text{hor}}^2 + v_{\text{ver}}^2)}{2} \mathrm{d}V$$

$$v_{\text{ver}} \approx 1 \text{ m / s}, \qquad \tfrac{1}{2} v_{\text{ver}}^2 = \Delta T_k \approx$$

$$v \approx 10 \text{ m / s}, \qquad \tfrac{1}{2} v^2 = \Delta T_k \approx$$



СОЛНЦЕ
D = 1,39 млн. км
ЛУНА
3,5 тыс. км
150 млн. км
384 тыс. км
Земля+Луна
D = 0,77 млн км
Земля
D = 12,7 тыс. км

Энцелад — шестой по размеру спутник Сатурна. Диаметр = 500 км, Масса = 5×10^{-6} Массы Земли. Период вращения вокруг Сатурна = 32,9 часа,

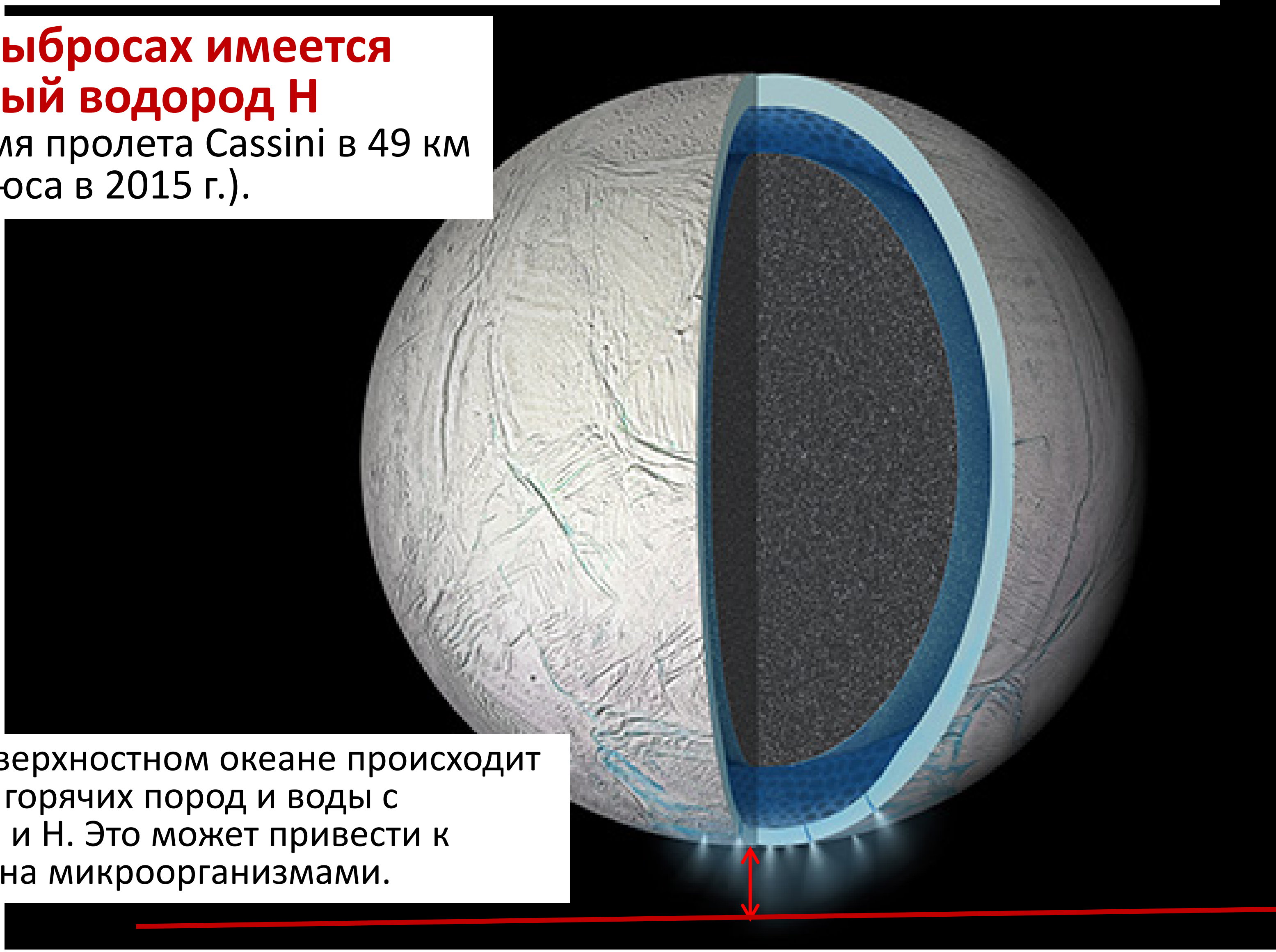
$R_{\max}$ = 240 тыс. км,

$R_{\min}$ = 180 тыс. км

Сравнение размеров Земли, Луны и Энцелада

Энцелад с глобальным подповерхностным океаном

В водяных выбросах имеется молекулярный водород H
(пробы во время пролета Cassini в 49 км от южного полюса в 2015 г.).



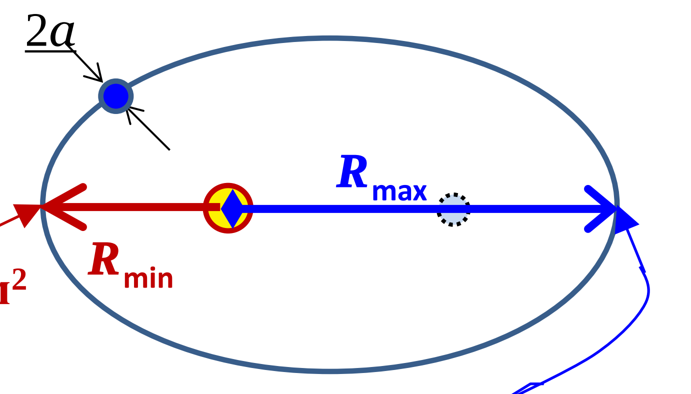
Видимо в подповерхностном океане происходит взаимодействие горячих пород и воды с выделением CO_2 и H. Это может привести к биосинтезу метана микроорганизмами.

На Земле эти процессы поддерживают примитивные микробы, получающих энергию без кислорода и света. Они обитают в глубинах океанов, болотах и кишечнике жвачных животных. Более 20% метана на Земле — результат деятельности подобных организмов.

Эллиптичность траектории Земли вокруг Солнца

$\bar{R} = 152$ Гм, $R_{max} = 152$ Гм, $R_{min} = 147$ Гм, $a = 6400$ км

$$\delta \bar{R} \equiv \frac{R_{max} - R_{min}}{\langle R \rangle} = \mathbf{3{,}5 \times 10^{-2}}$$



$I^* = 1412$ Вт/м^2
ЯНВАРЬ

$I^* = 1322$ Вт/м^2
ИЮЛЬ

$$\frac{\delta I^*}{I^*} \equiv \boldsymbol{\delta \bar{I}^*} = 2\delta \bar{R} \approx \mathbf{7\%},$$

$$\text{if} \quad \frac{\delta T}{\Delta T} = \frac{\delta I^*}{I^*},$$

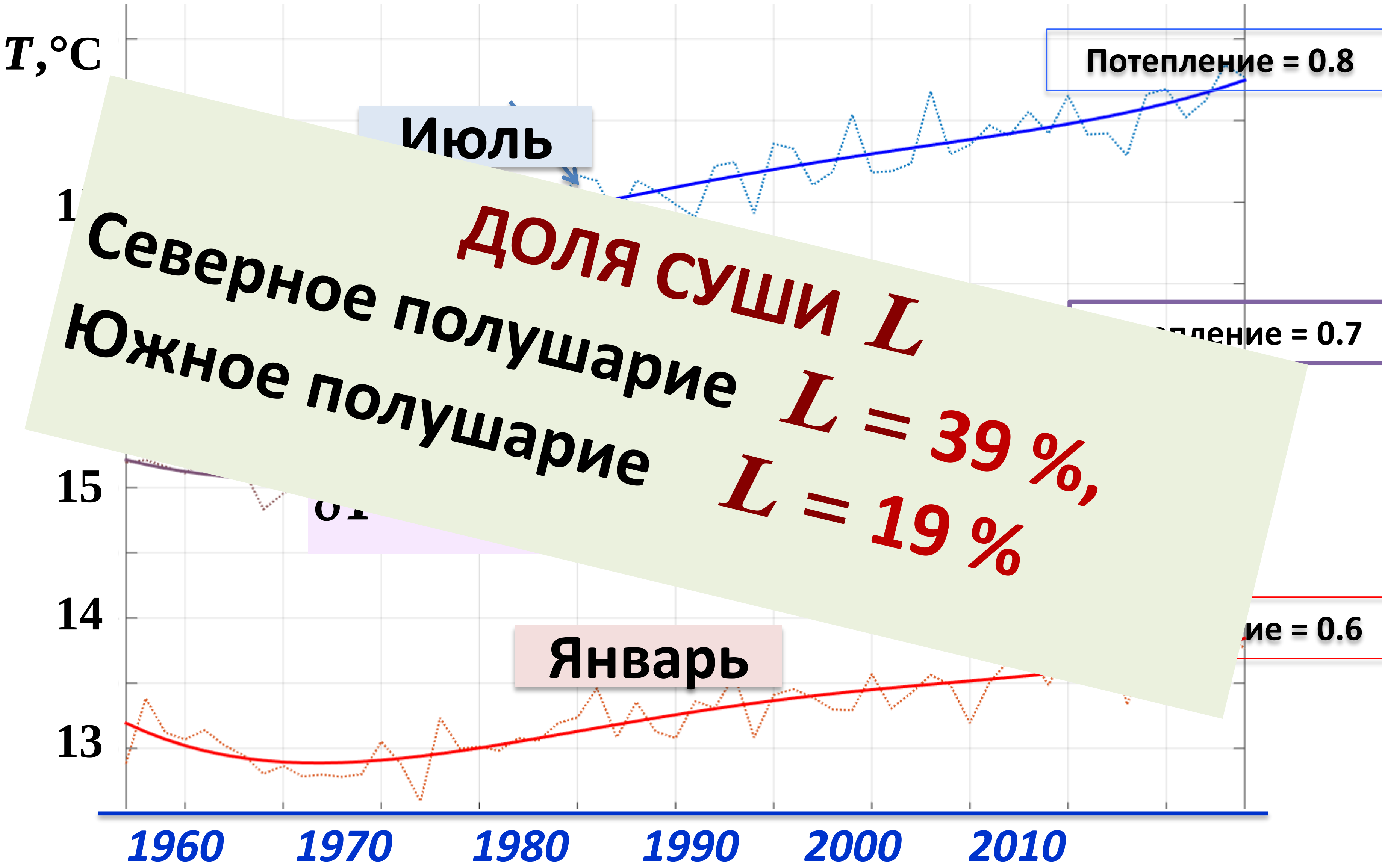
$$\Delta T_{season} \approx \left(+20 - (-20)\right) = 40\text{ K},$$

$$\Delta T_{space} \approx \left(+30 - (-40)\right) = 70\text{ K}$$

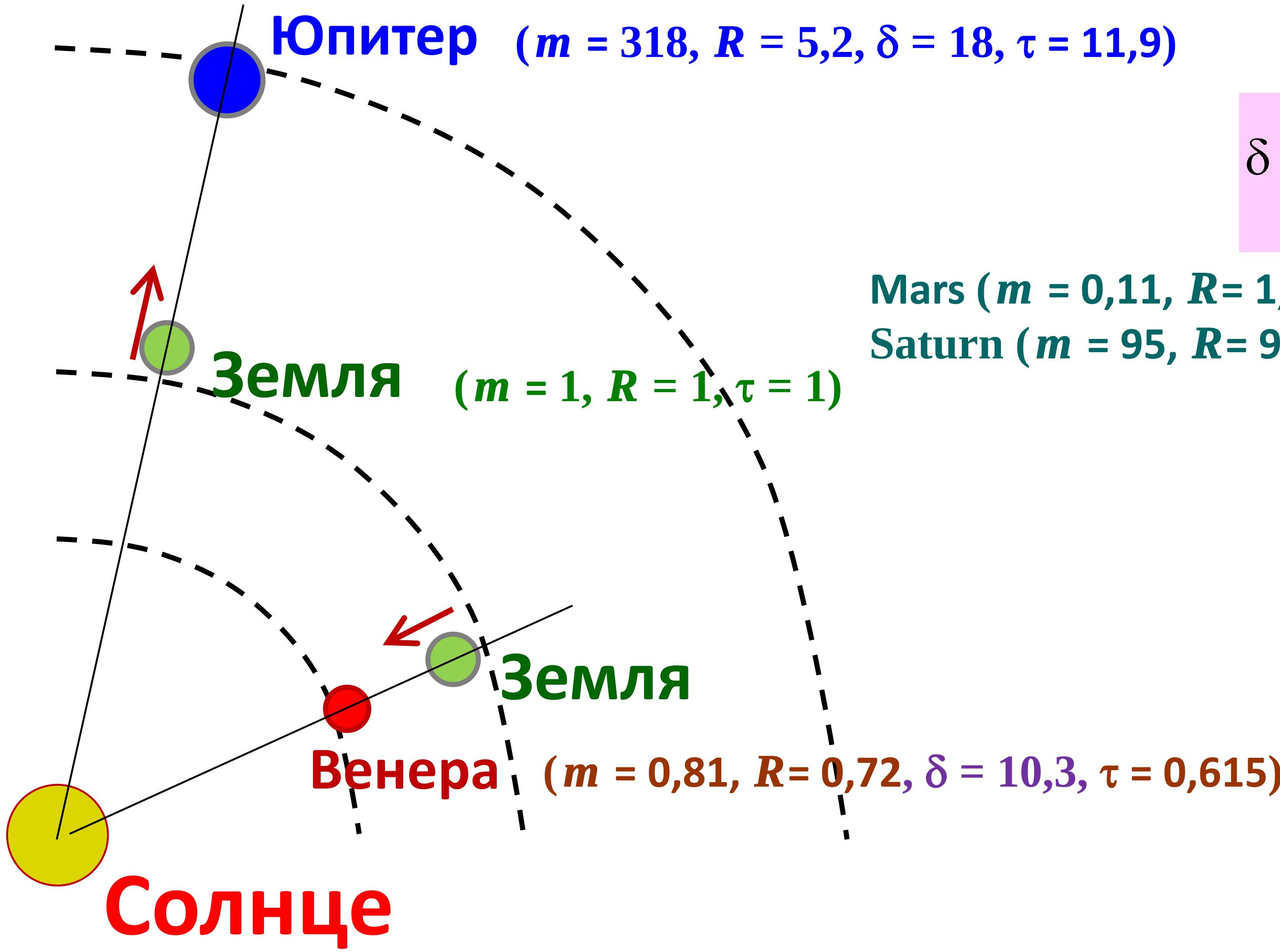
Тогда должно быть $\boldsymbol{\delta T = T_{январь} - T_{июль} \approx 4\mathrm{K}}$

Russian Academy of Sciences
P.P. Shirshov Institute
of Oceanology

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕМПЕРАТУРА



Возмущения орбиты Земли под действием гравитации Юпитера и Венеры



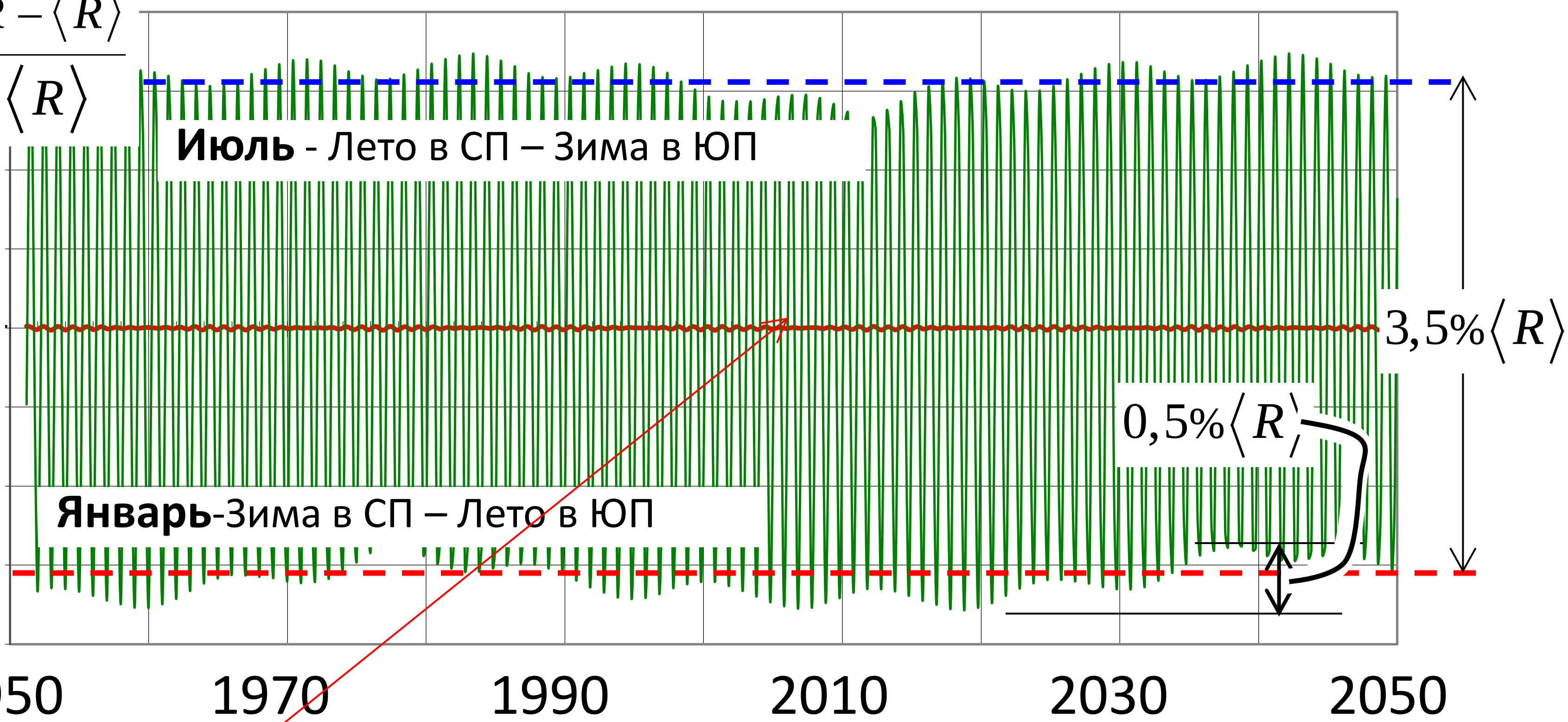
$$\delta = \frac{m}{(R-1)^2}$$

Mars (m = 0,11, R= 1,52, δ = 0,4)

Saturn (m = 95, R= 9,58, δ = 1,3)

Изменение расстояния Земли от Солнца

$$\overline{\delta R} = \frac{R - \langle R \rangle}{\langle R \rangle}$$



$$\langle \delta \bar{R} \rangle_{year} = \left\langle \frac{R - \langle R \rangle}{\langle R \rangle} \right\rangle_{year} \leq 10^{-4} = 0{,}01\%$$

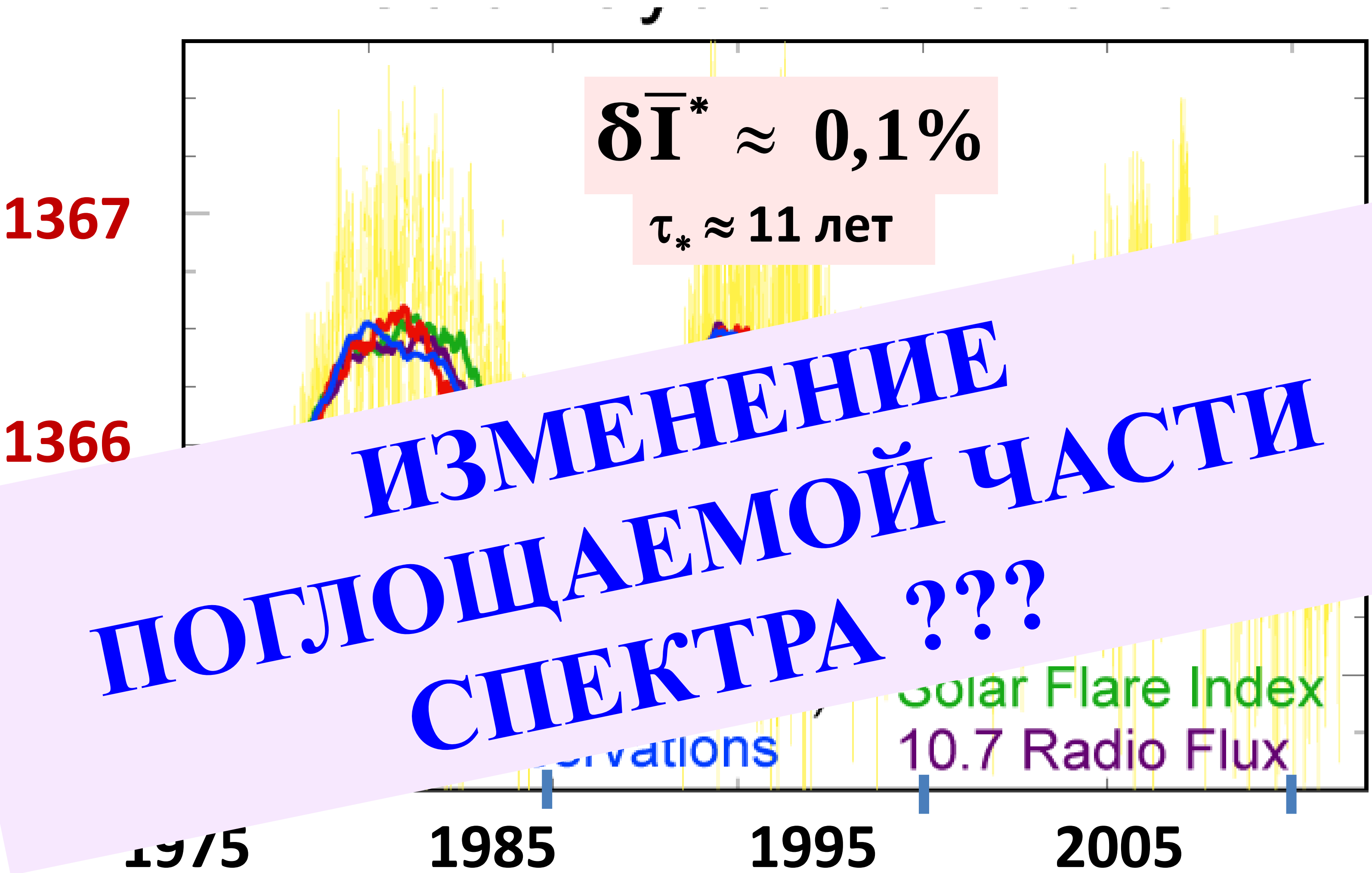
$\tau_* \approx 12$ лет; $\tau^* \approx 60$ лет;

$$\boldsymbol{\delta \bar{I}^*} = 2\ \delta \bar{R} \approx \mathbf{1\%}$$

$$\delta \bar{R}\left(\text{планетарное}\right) \approx 0{,}5\%,$$

$$\delta T\left(\text{планетарное}\right) \approx 1\% \times (+20 - (-20)) \approx 0{,}4\ \text{K}$$

6. Изменение солнечной радиации, W/m^2



ИЗМЕНЕНИЕ ПОГЛОЩАЕМОЙ ЧАСТИ СПЕКТРА ???