ВЫСТУПЛЕНИЕ Р. И. НИГ[1]МАТУЛИНА НА СЕМИНАРЕ ИГКЭ 25.05.2017

(запись Е.А. Жадановской, ИГКЭ; в тексте приводятся номера слайдов по презентации, которые сопровождались комментариями)

Слайд 1.

Речь сегодня пойдет об уравнениях. Генрих Герц (1857-1894) говорил: "Уравнения умнее тех, кто их вывел". В книге «Механика сплошной среды», которую я написал для мехмата и которая полна уравнениями, тоже приводится эта фраза. Можно привести массу примеров на эту тему. Например, взорвали атомную бомбу, как будет затухать ударная волна? Она будет затухать по закону T в степени 2/5. Для этого не нужно никаких суперсложных систем уравнений. Итак, к теме нашего заседания.

Слайд 2.

Во-первых, на чем основываются расчеты движения воздуха в атмосфере? Это уравнения гидродинамики. А именно, уравнение сохранения массы, или неразрывности, которое есть во всех учебниках. Потом, уравнения движения, сохранения импульса, или второй закон Ньютона: масса частицы воздуха, умноженная на ускорение $\frac{dv}{dt}$, равна сумме всех сил, которые на нее действуют. Какие силы действуют? Сила тяжести, градиент давления, турбулентное трение и Кориолисова сила. И, наконец, уравнение притока тепла - температура меняется за счет притока тепла. За счет чего возникает приток тепла? Во-первых, благодаря турбулентной теплопроводности, во-вторых, вследствие поглощения/выделения лучистой энергии. Это все входит в Q. Там есть еще третье слагаемое – выделяется или поглощается тепло при фазовых переходах - испарении, конденсации, замерзании, оттаивании. И, наконец, есть еще уравнение состояния совершенного газа. Газ называем совершенным, если он подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона. Иногда его называют идеальным газом, но в современных учебниках по гидродинамике идеальным газом называют невязкие среды. Особые свойства совершенного газа выполняются, когда давление или плотность не очень велики - для воздуха это порядка до 50 или 60 очень точно выполняется. При бОльших давлениях необходимо вводить поправки, это связано еще и с температурой.

Слайд 3.

Воздух состоит из сухой части и влаги. Вода, которая может присутствовать в виде водяного пара, капель или кристаллов (облака, туманы, осадки – дождь, снег). Массовое содержание влаги мало – это десятые доли процента, но, тем не менее, влага играет существенную роль в тепловом балансе. При расчетах можно пренебречь горизонтальным

[1] Этот текст не редактировался докладчиком.

движением паровой и капельной влаги относительно воздуха, потому что она переносится в основном конвективно. Но в вертикальном направлении эти относительные движения могут быть существенны.

Итак, можно считать, что горизонтальная скорость движения водяного пара совпадает со скоростью движения сухого воздуха, а в вертикальном направлении нет. Соответствующую относительную скорость следует учитывать, потому что есть силы тяжести. Далее уравнение сохранения массы пара и турбулентной диффузии: относительная скорость паровой влаги пропорциональна градиенту концентрации этой влаги. Это уравнение диффузии Фика. То же самое для капель. Для капель осаждение определяется аэродинамическими силами: скорость оседания капель относительно воздуха определяется силой тяжести и аэродинамическим сопротивлением.

Слайд 4.

Это наиболее общая постановка. Она должна быть дополнена уравнением для вертикального теплового потока Q. Здесь нужно учитывать турбулентную теплопроводность и потоки лучистой энергии. Солнечная коротковолновая радиация слабо поглощается атмосферой, а длинноволновая радиация поглощается и земной поверхностью, и атмосферой (в том числе и углекислым газом, и водяным паром, и прочими парниковыми газами). Для интенсивности испарения также необходимо задать соответствующее уравнение.

Слайд 5.

Обратите внимание: есть 3 тождественные формы записи уравнения притока тепла. Первое: прирост внутренней энергии определяется притоком тепла и плюс работа сил давления на сжатие или расширение газа. Это называется работой внутренних сил. О работе вязких внутренних сил ничего здесь не пишем, потому что она в атмосферных процессах ничтожно мала. Это самая распространенная форма уравнения притока тепла.

Но для совершенного газа можно написать и так: изменение плотности определяется изменением давления и притоком тепла, т.е. если тепло подходит, то при постоянном давлении газ расширяется. Это в точности получается тождественным преобразованием.

Есть и третья форма уравнения притока тепла, тоже эквивалентная предыдущим: здесь используется теплоемкость при постоянном давлении.

Слайд 6.

Будем рассматривать здесь так называемые климатические, погодные, метеорологические масштабы. Введем следующие ограничения. Характерные времена изменения параметров – более нескольких минут, т.е. $> 10^2$ с, и только такие. Горизонтальные скорости, о которых пойдет речь, – десятки метров в секунду (5, 10, 20), но не более. Вертикальные скорости – меньше нескольких метров в секунду. Отсюда, имея характерные времена и скорости, можно вычислить и характерные пространственные масштабы для изменения этих переменных: порядка км и более. Изменение параметров по вертикали – сотни метров и более.

Есть, конечно, и экстремальные масштабы, в которых времена – секунды и меньше, горизонтальные скорости – сотни метров в секунду, а вертикальные скорости могут быть десятки метров в секунду. Отсюда соответствующие масштабные параметры по горизонтали – сотни метров, а по вертикали - 100 м. Такие ситуации не входят в предмет нашего рассмотрения сегодня. Это, например, тайфуны. Для них нужно писать более полную систему уравнений. Она не будет квазистатической. Таким образом, уравнения, о которых пойдет речь в презентации, не всегда годятся. Но они годятся для типовых, «гладких» изменений погоды, а также для изменений климата.

Оценки производных, которые входят в эти уравнения, делаются так: характерная скорость делится на характерное время, при которой эта скорость меняется.

Слайд 7.

При решении подобных задач полезно ввести безразмерные переменные. Для всех компьютерных расчетов любых задач всегда выписываются масштабы. Эти масштабы были оговорены выше. Отсюда находим безразмерные переменные: время – секунда делится на характерное время; пространство – метры делятся на характерный пространственный масштаб. Соответственно находим характерные безразмерные скорости: сама скорость (м/с) делится на характерный масштаб. Таким способом в задачу вводится безразмерная скорость.

Что такое характерный масштаб? Если характерное время – минуты, то характерную скорость умножаем на минуты и получаем характерный масштаб пространства. Будем считать, что характерный масштаб длины в проблеме – это расстояние более км по горизонту. Если более км, то это подходит. Если менее км (порядка сотни метров), то для дальнейших рассуждений не подходит, поскольку потребует более полной системы уравнений. В математике безразмерные величины часто обозначаются O(1) – это значит величина порядка единицы. Это не 0.1 или 0.01. Может быть 0.8 или 1.5, но не 100.

Приведем пример. Рассмотрим ускорение по оси x: $\frac{d\overline{v_x}}{dt}$. Обезразмерим горизонтальную скорость и поделим ее на характерное время: $\frac{V_{hor}}{\tau}$. Так определяется безразмерное ускорение $\frac{d\overline{v_x}}{dt}$ и масштаб горизонтального ускорения A_{hor}. Аналогичные операции можно выполнить в отношении силы Кориолиса. Сила Кориолиса f^{cor} равняется угловой скорости вращения Земли, умноженной на характерную скорость течения. Далее, обезразмериваем скорость течения и угловую скорость Ω. Скорость течения здесь порядка десятка метров в сек. Характерный масштаб кориолисовых сил равняется: масштаб скоростей течения умножить на Ω.

Слайд 8. Таким образом, у нас в уравнении будут безразмерные скорости, безразмерные ускорения и масштабы ускорений. Масштаб ускорений в горизонтальном направлении – горизонтальная скорость V_{hor}

делить на характерное время τ, или квадрат скорости по горизонту делить на L_{hor}, потому что τ одновременно равняется L_{hor} делить на V_{hor}. Кориолисово ускорение как масштаб равно 2Ω, умноженное на горизонтальную скорость V_{hor} (горизонтальная скорость гораздо больше, чем вертикальная). Масштаб ускорения по горизонтали меньше, чем 10^{-1} м/с^2, по вертикали меньше, чем 10^{-2} м/с^2, а кориолисово ускорение меньше, чем 10^{-3} м/с^2. Очевидно, что масштабы всех этих ускорений - кориолисово, по горизонту и вертикали - определяются в каждой задаче свои. Но мы здесь сегодня рассматриваем такие процессы в атмосфере, в которых характерные времена порядка минуты и более, характерные скорости по горизонту 10 м/с и менее, а по вертикали – 1 м/с метр и менее. Таким образом, два масштаба по времени и по скорости позволяют определить масштаб ускорений, которые есть в этой задаче.

В связи с этим здесь возникают малые параметры. Кроме ускорений, которые здесь написаны, есть еще ускорение свободного падения g = 9,81 м/с^2. Поэтому можем ввести малые параметры: отношение ε вертикального, горизонтального и кориолисова ускорений к g. Мы видим, что параметр ε соответственно меньше, чем 10^{-2}, 10^{-3} и 10^{-4}. Ясно, что ускорения, которые мы рассматриваем и которые входят в уравнение сохранения импульса, т.е. во второй закон Ньютона, много меньше, чем ускорение силы тяжести. Здесь будут рассмотрены только такие задачи, проблемы, процессы (и только эти!). Если ускорение порядка g, то это не годится для дальнейших выкладок. При расчетах погоды все используют это предположение, если не рассчитывать бури, шторма и т.д. Мы рассматриваем движение воздуха как идеального газа. Хотя потом можно учесть и влияние турбулентных вязких напряжений. Это непринципиально.

Слайд 9.

Поэтому уравнения импульса будут записаны следующим образом: $\frac{\partial p}{\partial x}$ есть масса ρ, т.е. плотность воздуха, умножить на характерные ускорения О(величина порядка А). Аналогично для $\frac{\partial p}{\partial y}$. А для $\frac{\partial p}{\partial z}$ это есть [1 + О(величина порядка А)], потому что по вертикали действует вертикальное ускорение g – проявление силы тяжести.

Градиенты давления по горизонтали, отнесенные к g, малы (порядка ε). А по вертикали - порядка 1. Отсюда следует, что давление в точке z однозначно как в школьной гидростатике определяется массой газа $\int_z^\infty ...$ над точкой z (интегралом от плотности над точкой z). Вместо $\propto$ можно ставить конечное $H > 0$, потому что основная масса воздуха сосредоточена по высоте до нескольких десятков км.

Обратим внимание, что в уравнении Ньютона для вертикальной составляющей (масса на ускорение по вертикали) скорость v_z пропала. Как тогда рассчитать вертикальную скорость? Ее уже из уравнения движения импульса по вертикали не определишь. Мы пренебрегли всеми ускорениями. Скорость v_z ничтожно влияет на распределение давления.

Слайды 10-11.

Обратим внимание, что вертикальные потоки иногда существенны, а иногда нет.

Слайд 12.

Как еще можно определить вертикальную скорость? Вертикальная скорость еще входит в уравнение неразрывности. Изменение плотности газа определяется дивергенцией **v**. Отсюда мы ее и выразим, перенесем $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ в левую часть уравнения и получим, что производная вертикальной скорости по вертикали определяется горизонтальной дивергенцией и изменением плотности. Это точное уравнение, которое следует из уравнения неразрывности (оно же уравнение сохранения массы). Его берем за основу.

Слайд 13.

Данное уравнение используется в океанологии. Но в океанологии показано, что изменение плотности воды при крупномасштабных течениях (десятки км и т.д.) происходит за счет изменения давления, солености и температуры. Если сделать все оценки, то можно показать, как они меняются во времени. В океанологии на основе масштабного анализа показывается, что $\frac{d\rho}{dt}$ много меньше каждого из слагаемых $\frac{\partial v_i}{\partial i}$, $i = x, y, z$. Поэтому в океане $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ - как в случае квазинесжимаемой среды, хотя все течения в океане определяются зависимостью плотности от температуры, солености и давления. А в уравнении неразрывности это несущественно. Это - приближение Буссинеска, оно широко используется.

Слайд 14.

Многие полагают, что для атмосферы величина $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$ мала, но это не так. Она того же порядка, что и второе слагаемое, исходя из масштабов, о которых шла речь ранее. Из уравнения притока тепла: изменение плотности определяется изменением давления и притоком тепла. Поэтому можно $\frac{d\rho}{dt}$ выразить из следующего соотношения:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \frac{\gamma - 1}{\gamma p}Q^*$$

. Это позволяет получить выражение для $\frac{\partial v_z}{\partial z}$.

Значение $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ определяется горизонтальной дивергенцией, изменением давления и притоком тепла. Ясно, что если к воздуху подвести тепло, то он расширяется при постоянном давлении. Т.е. изменение плотности определяется не только изменением давления, но и притоком тепла. Мы умеем вычислять Q^* из закона теплопроводности, кинетику испарения и конденсации с захватом радиационной энергии.

Подчеркнем еще раз, что в рассматриваемом классе задач давление в каждой точке определяется массой газа над этой точкой. А из уравнения состояния совершенного газа $p = R\rho T$. Таким образом температура находится из гидростатического закона.

Слайд 15.

Напомню, что субстанциональная производная – разность между значением переменной, за которой следим, в сдвинувшейся точки и ее значением в исходной точке, деленная на Δt, при $\Delta t \to 0$.

Позже будет показано, что первые две горизонтальные производные переноса давления меньше третьей, вертикальной:

$$v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} \ll v_z \frac{\partial p}{\partial z}$$

Рассмотрим, как определяется частная производная давления. Давление есть масса воздуха в точке z над точкой z:

$$\boldsymbol{p} = g \int_z^H \rho dz'$$

Мы берем частную производную от $\boldsymbol{p}$. Тогда для такого интеграла с фиксированными границами частную производную по времени можно внести под знак интеграла. А градиент давления $\frac{\partial p}{\partial z}$ определяется по гидростатике как $-g\rho$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$\frac{dp}{dt} = g \int_z^H \frac{\partial \rho}{\partial t} dz' - g\rho v_z$ (**).

Далее, частная производная $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ под знаком интеграла определяется из уравнения неразрывности дивергенцией ρ**v**. Первые два слагаемых под знаком интеграла (выделено красным) в выражении мы оставим без изменений. Интеграл от третьего слагаемого (выделено синим) берется. Он равен $g\rho v_z$. Заметим, что точно такое же слагаемое входит со знаком минус в (**). Отсюда следует, что субстанциональная производная давления $\frac{dp}{dt}$ в соответствующей частице воздуха каждый раз определяется интегралом $\int_z^{\mathrm{H}} \ldots$ от горизонтальной дивергенции потока массы $\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right)$. В условиях гидростатики, т.е. когда давление определяется точкой массой газа над соответствующей частицей, это точное уравнение.

Слайд 16.

В учебнике Дж. Холтона субстанциональная производная записана как $\frac{dp}{dt} = -g\rho v_z$. Это принципиальная ошибка и с математической точки зрения и с точки зрения основных законов физики. Обратим внимание, что должно быть: $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v_z \frac{\partial p}{\partial z}$. Холтон сохранил второе слагаемое и выбросил частную производную по времени, что неверно, поскольку величина $\frac{\partial p}{\partial t}$ не ноль. Такая же погрешность есть и в работе Г. И. Марчука. Он тоже считал, что акустика не должна влиять на погоду и тоже выкинул $\frac{\partial p}{\partial t}$. Отсюда следует уравнение: $\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0$, из которого изменение вертикальной скорости не зависит ни от каких теплот и определяется только полями скоростей.

Это - существенная ошибка. Ведь должно быть $\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+v_z\frac{\partial p}{\partial z}$, т.е. изменение массы газа по вертикали плюс частная производная по времени. Тогда учитывая предыдущую оценку $\frac{\partial p}{\partial t}$, слагаемое $-g\rho v_z$ сокращается, так как со знаком плюс такое же слагаемое входит в $\frac{\partial p}{\partial t}$.

Посмотрим теперь все это с физической точки зрения. Интеграл $\int_z^{\mathrm{H}}\ldots$ есть $g\rho\frac{V_{hor}}{L_{hor}}(H-z)$, где ρ - характерное значение плотности, V_{hor} - характерная горизонтальная скорость, L_{hor} - характерный масштаб по пространству, $(H-z)$ - высота столба над точкой с вертикальной координатой z. А это величина того же порядка, что и $g\rho v_z$.

Приведем пример. Рассмотрим гидростатическую задачу. Допустим в атмосфере есть труба небольшого диаметра, расположенная вертикально от земной поверхности до большой высоты, более 40 км. Везде в трубе скорости v_x и v_y равняются нулю. Смотрим за частицей, которая может перемещаться вертикально при подводе тепла к трубе. Частица может подняться вверх при тепловом расширении столба. Давление в этой частице будет меняться или нет? Оно не будет меняться, так как масса газа над этой частицей не меняется, потому что нет никаких притоков. А в соответствии с Холтоном давление будет меняться, и это ошибка.

В процессах, когда вертикальные скорости не более, чем метры в секунду, характерные времена не менее, чем минуты, будет квазистатическое распределение давления. Отметим, что в этой задаче инерция несущественна.

Рассмотрим второй вариант задачи: нет трубы, тоже выделяем частицу. Но теперь есть характерные горизонтальные скорости, и масса над частицей будет переменной, тогда давление будет меняться в соответствии с выведенным здесь точным уравнением. Указанное уравнение для изменения давления будет асимптотически точным. Это значит, что распределение давления стремится к предписанному этим уравнением, если параметр ε будем устремлять к нулю. Он в реальности порядка 10^{-4}, 10^{-5}.

Слайд 17.

Таким образом, в уравнение для вертикальной скорости $\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)-\frac{1}{\gamma p}\frac{dp}{dt}+\frac{\gamma-1}{\gamma p}Q^*$ подставляем выражение для $\frac{dp}{dt}=g\dot{M}$, где $\dot{M}$ – изменение массы над частицей за счет горизонтальных движений. Полученное уравнение является асимптотически точным для вертикальной скорости. Это значит, что все вертикальные ускорения стремятся к нулю. Более того, все ускорения малы по сравнению с силой тяжести. Напоминаем, что здесь выброшен горизонтальный перенос давления.

Обратим внимание на то, что уравнение для $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ не является локальным. Оно определяется не только величинами в наблюдаемой точке, но по всей высоте столба. Это и есть скорость звука в бесконечности.

Слайд 18.

Похожее уравнение для вертикальной скорости есть у Лоренца (1967). Оно отличается от полученного здесь только одним слагаемым, выделенным желтым. Рассмотрим отношение указанного слагаемого к $\frac{\dot{M}}{\gamma M}$. Из уравнения импульса асимптотически получаем: каждое из слагаемых $v_x \frac{\partial p}{\partial x}$ и $v_y \frac{\partial p}{\partial y}$ в числителе оценивается как $V_{hor} \rho O(A_{hor} + A_{cor})$, поскольку $\frac{\partial p}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial y}$ определяется массой, умноженной на характерные горизонтальные ускорения и ускорение Кориолиса. Знаменатель $\frac{\dot{M}}{\gamma M}$ оценивается как средняя плотность по высоте от z до H, умноженная на $\frac{V_{hor}}{L_{hor}}$ и на высоту столба (H - z), делить на знаменатель (на слайде). Получаем, что $\frac{\dot{M}}{\gamma M}$ есть величина порядка $\frac{V_{hor}}{L_{hor}}$.

Слайд 19.

Используя полученные оценки, мы показали, что данное отношение -ь порядка $\mathrm{O}(\mathrm{M}^2)$, где М – число Маха.

Слайд 20.

Учитывая, что Мах есть отношение горизонтальной скорости к скорости звука, оценим M^2. Получаем зависимость: если ε малы, то и махи малы.

Слайд 21.

Таким образом, $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ определяется полями скоростей плюс дополнительными процессами, связанными с притоком тепла, испарением и конденсацией. Приведены оценки для режима: V_{hor} порядка 10 м/с, L_{hor} порядка 10^5 м, а характерное время 10^4 с.

Слайд 22.

Таким образом, полная система уравнений для атмосферы с вертикальной квазистатикой включает в себя уравнения, в которых слева стоят частные производные по времени: для температуры T, где $g\dot{M}$ описывает изменение давления за счет горизонтального переноса массы; для скорости по горизонтали $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ и $\frac{\partial v_y}{\partial t}$; для изменения давления $\frac{\partial p_h}{\partial t}$ на нижней границе атмосферы. К ним надо прибавить уравнения, где слева стоят частные производные по вертикали.

Слайд 23.

Удобнее и правильнее использовать тождественную систему уравнений, в которой уравнения записаны не для температуры T, а для плотности ρ, т.е. изменение плотности в фиксированной локальной точке определяется div $\boldsymbol{v}$. Следующие два уравнения – горизонтальные скорости с инерцией. Последние три уравнения - для величин, определенных только производными по вертикали. Далее определив по производным все эти величины, можно вычислить давление, потому что оно определяется массой, и, затем, температуру – давление, деленное на ρR. Обратим внимание, что в квазистатике $\frac{\partial p}{\partial x}$ определяется производной массы газа. Аналогично, $\frac{\partial p}{\partial y}$.

Слайд 24.

Начальные условия необходимо задавать только для тех величин, для которых в уравнения входят производные по времени: для температуры T, для горизонтальных скоростей и для давления на границе атмосферы. Если геострофическая модель, где ускорения, связанные с производными по горизонтали выбрасываются, остаются только кориолисовы, то не надо задавать начальные условия для горизонтальных скоростей.

Слайд 26.

Задаются также граничные условия.

Слайд 27.

Введем параметр ε. Тогда вводятся масштабы всех ускорений: A_{ver}, A_{hor}, A_{cor} и M^2. Отсюда следует теорема: уравнения являются асимптотически точными, если все малые параметры ε стремятся к нулю.

Но даже в газовой динамике иногда при использовании уравнений непрерывного движения возникают режимы обострения. Они возникают в задачах теплопроводности. Это свидетельствует о том, что погода так складывается, что иногда возникают условия для бури.

Слайд 28.

Обратим внимание на то, что градиент давления определяется изменением по высоте производных от плотности по x и y, а не $C^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$. Это следствие гидростатики. И в дифференциальном операторе нет скорости звука C. Таким образом, если гидростатика по вертикали, то C исчезает и для уравнений горизонтального движения.

Слайд 30.

Поясним, что такое некорректно поставленная задача. Это означает, если строго решать и допускать возмущения, то какое бы малое возмущение ни задали, найдется достаточно короткая волна, которая мгновенно вырастет и развалит решение. Однако некорректно поставленные задачи решают. Их регуляризируют.

Если бы мы решали аналитически, то получили бы точное решение. Но переход к конечно-разностной схеме и численному решению сразу генерирует коротковолновое возмущение, разваливающее решение через некоторое время. Поэтому всегда необходим фильтр, или численная диссипация. Например, когда мы решаем задачи газовой динамики, возникает ударная волна. А это дополнительные уравнения к уравнениям Эйлера. Чтобы облегчить, мы вводим гораздо большую вязкость газа, чем на самом деле, и получаем ударную волну на несколько разностных сеток, но зато непрерывно решаем задачу. Мы понимаем, что завышаем толщину ударной волны, но когда толщина не важна, то мы применяем такой прием. Так и здесь нужна численная диссипация.

Слайд 31.

Представьте, что решаете дифференциальное уравнение (представлено на слайде), и, если τ много меньше, чем характерное время этой задачи, то шаг счета нужно брать очень мелким, и численное решение (красная линия) выйдет на эту асимптотику. Если шаг не мелкий, то вы получите развалeнное решение (голубая линия). Чтобы это ликвидировать, надо считать, что $v = v^*$, или ввести псевдовязкость, добавив в уравнение соответствующее вязкое слагаемое. Последнее (зеленый пунктир) обеспечивает неверное решение в начальной зоне, которое дальше будет верным.

Слайд 32.

Глупый метод, если учитывать инерцию по вертикали. Инерция по вертикали в этих процессах не играет никакой роли с точностью до 10^{-4}-10^{-5}. Рассмотрим на примере определения веса мухи: взвесить тело без мухи, потом тело с мухой, а потом найти разность. Это глупо, потому что для определения веса мухи дополнительное тело не нужно, оно мешает. Аналогично глупо надеяться повысить точность прогноза за счет учета сил по вертикали.

Слайд 34.

А в акустике все по-другому. В акустике при высоких частотах ускорения будут больше, чем ускорение силы тяжести, и уравнение по вертикали принимает другой вид. Можно пренебречь силой тяжести и вторым слагаемым в левой части уравнения.

Спасибо за внимание!