Семинар Института глобального климата и экологии

Росгидромета и РАН (ИГКЭ)

25 мая 2017 года

SUMMARY

(составлено к.ф.-м.н. Е.А. Жадановской, ИГКЭ)

Состоялся доклад **д.ф.-м.н., академика РАН НИГМАТУЛИНА Роберта Искандровича** (МГУ им. М.В. Ломоносова, Институт океанологии им. П.П. Ширшова) «**Уравнения гидро- и термодинамики атмосферы с малыми силами инерции по сравнению с силой тяжести**». С развернутым комментарием выступил **д.ф.-м.н., член-корр. РАН СЕМЕНОВ Владимир Анатольевич.** Председательствовал д.ф.-м.н. **Семенов Сергей Михайлович**, ИГКЭ, Институт географии РАН.

Семенов С.М. (председательствующий): *Добрый день, уважаемые коллеги. Мы сегодня послушаем доклад Роберта Искандровича Нигматулина. Будут рассмотрены гидро- и термодинамические уравнения для атмосферы Земли в климатическом и метеорологическом масштабах, когда силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с силой тяжести. Владимир Анатольевич Семенов выступит с развернутым комментарием. Пожалуйста, Роберт Искандрович.*

Р.И. НИГМАТУЛИН ВЫСТУПАЕТ С ДОКЛАДОМ, ТЕКСТ ДОКЛАДА И ПРЕЗЕНТАЦИЯ ПРИЛАГАЮТСЯ.

ВОПРОСЫ К Р.И. НИГМАТУЛИНУ/ОТВЕТЫ/ДИСКУССИЯ

Семенов С.М. (ИГКЭ): *Давайте упростим задачу, рассмотрим одномерный случай. Есть только вертикальная ось z. Пусть z – высота над земной поверхностью, v(t,z) – вертикальная составляющая скорости, ρ(t,z) – плотность воздуха. Вот обычные уравнения – второй*

$$\begin{cases} \rho(t,z)\dfrac{d}{dt}\big(v(t,z)\big) = -g\rho(t,z) - \dfrac{\partial p(t.z)}{\partial z} \qquad (I) \\ \\ \dfrac{\partial \rho(t,z)}{\partial t} = - \dfrac{\partial (v(t,z)\rho(t,z))}{\partial z} \qquad (II) \end{cases}$$

Закон Ньютона и уравнение неразрывности (сохранение массы). Если рассматривается квазистатическое приближение, то

$$g\rho(t,z) + \frac{\partial p(t.z)}{\partial z} = 0,$$

т.е. результирующая всех сил (в вертикальном направлении, в данном случае) равна нулю.

Тогда эти два уравнения приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,z)}{\partial t} = -v(t,z)\dfrac{\partial v(t,z)}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial \rho(t,z)}{\partial t} = -\, v(t,z)\,\dfrac{\partial \rho(t,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial v(t,z)}{\partial z}\,\rho(t,z). \end{cases}$$

Первое уравнение говорит о том, что каждая частица воздуха движется с неизменной скоростью, а второе, как и выше, что масса сохраняется. Я не ошибаюсь?

Нигматулин Р.И.: Нет, силы действуют в вертикальном направлении – сила тяжести и сила давления.

Семенов С.М. (ИГКЭ): А почему у Вас не компенсируется сила тяжести градиентом давления, если рассматривается квазистатика? Разве она не в этом?

Нигматулин Р. И.: Нет. Квазистатика – когда (в Ваших обозначениях)

$$\frac{dv}{dt} \ll g$$

Это серьезное предположение. Оно не всегда выполняется. Например, в акустике наоборот.

Семенов С.М. (ИГКЭ): *Давайте скажем по-другому. Вот у вас есть ситуация, когда в правой части уравнения Ньютона нет силы. Это значит, что каждая частица сохраняет состояние равномерного движения в* *вертикальном направлении, если сила тяжести уравновесилась градиентом давления.*

Нигматулин Р.И.: В этом уравнении – уравнении Ньютона - ускорения малы, но скорости есть, и они меняются во времени. Скорости есть, а ускорения малы!

Семенов С.М. (ИГКЭ): *В 1-м уравнении написано: слева ρ – масса, умноженная на субстанциональную производную от скорости, справа написаны две силы, равнодействующая которых равна нулю (в силу принятого Вами допущения). Т.е. равнодействующая ноль. Второе – это уравнение неразрывности. Заметим, что, если справа стоит ноль в первом уравнении, т.е. силы уравновесились, то ρ можно сократить. Сила тяжести уравновесилась градиентом давления?*

Нигматулин Р.И.: Почти всегда с точностью до 10^{-6}. Представьте, что $\rho g = 1000000, \frac{\partial p}{\partial z} = 1000001$. Тогда левая часть уравнения – это 1. Я говорю о том, что из этого уравнения ускорение считать невозможно, потому что нужно миллион правильно посчитать, миллион один, потом взять разницу. Поэтому левую часть я выбрасываю, а изменение v по пространству и времени я определяю из других уравнений.

Семенов С.М. (ИГКЭ): Но, все же, если градиент давления уравновешен силой тяжести, то получается, что каждая частица сохраняет состояние прямолинейного равномерного движения.

Нигматулин Р.И.: Я вместо полного ньютоновского уравнения по вертикали учитываю только условие гидростатики, но при этом я не говорю, что ускорение частиц воздуха равно нулю. Я его определяю, оно у меня будет переменной и во времени и пространстве. Я для него написал уравнение.

Семенов С.М. (ИГКЭ): *Т. е., вы хотите сказать, что асимптотически это будет равенство, но если попытаться это равенство в самом начале подставить, то получится ерунда?*

Нигматулин Р.И.: У меня в уравнении Ньютона равнодействующая сила равна нулю, а ускорение в уравнении неразрывности – нет.

Семенов С.М. (ИГКЭ): *Т.е. в одном уравнении вы считаете его нулем, а в другом не нулем?*

Нигматулин Р.И.: Совершенно верно! Да, я считаю его малым, потому что другие члены больше. И с ними я работаю.

Семенов С.М. (ИГКЭ): Какие еще есть вопросы? Если вопросов нет, то, пожалуйста, Владимир Анатольевич, вам слово.

Д.ф.-м.н., член-корр. РАН СЕМЕНОВ ВЛАДИМИР АНАТОЛЬЕВИЧ (ИФА РАН) выступает с комментарием (текст ниже).

Семенов В.А.: Я продолжу начавшуюся дискуссию. Мы приравниваем изменение давления к изменению силы тяжести. А почему нет вертикальных скоростей? Это такой парадокс, который настолько сложен, насколько и прост. То же самое происходит с геострофическим приближением, что и с гидростатическим. Поэтому используется термины квазигеострофическое и квазигидростатическое. Потому что, если бы было геострофическое приближение, то не менялось бы движение, картина была бы одна и та же. То же самое и с квазигеострофическим. Если бы градиент давления всегда уравновешивался силой Кориолиса, то поле скорости всегда было бы абсолютно одним и тем же. Тем не менее оно меняется.

В первом успешном уравнении, применяемом для прогноза погоды, использовалось квазигеострофическое приближение. В данном случае уравнение для вертикальной скорости является диагностическим. Тот факт, что вертикальное ускорение – это «муха» по сравнению с силой тяжести, дает нам право использовать диагностическое уравнение для изменения вертикальной скорости. В то время как переменные для горизонтальной скорости являются прогностическими. Прогностические уравнения – уравнения, в которых есть производная по времени, в диагностических уравнениях такой производной нет.

Вернемся к истории, потому что задача вывода уравнений, которые можно использовать для прогноза погоды и для расчета общей циркуляции атмосферы, стоит уже минимум век. В начале 20 века она стала активно развиваться. То, что сегодня нам показал Роберт Искандрович, все правильно, математически там нет ошибок. Второй закон Ньютона и первое начало термодинамики непосредственно неприменимы в геофизической гидродинамике вследствие нескольких причин. Во-первых, уравнения слишком сложные, слишком много в них различных слагаемых, которые мы не можем оценить в геофизической системе - это и приток тепла, и фазовые переходы и т.д. Во-вторых, и это самое главное, одни и те же уравнения описывают огромное количество классов движения: звуковые волны, гравитационные волны, планетарные. Поэтому задача создания уравнений, которые применимы и для прогноза погоды, и для описания гидродинамики атмосферы – это задача о масштабах движения. Во всех учебниках по геофизической гидродинамике описание всех задач начинается с понимания, каковы масштабы движения, что мы хотим смоделировать и описать, формализовать с помощью этих уравнений.

Уравнение, которое показал Роберт Искандрович, это так называемое tendency equation. Оно есть в статье Элиассена (Eliassen 1949), который ссылается на монографию Ричардсона о численном интегрировании уравнения для прогноза погоды, который, в свою очередь, не смог сделать успешный прогноз из-за сложности уравнений. Есть еще более ранние работы (Маргулис, 1903). Таким образом, уравнение тенденции давления, или плотности, которое выражается через вертикальную скорость и дивергенцию скорости, было известно давно. Но во всех ранних работах за этим уравнением следует приписка, что, к сожалению, такие уравнения не могут быть использованы для прогноза погоды и объясняется почему. О том же самом писал Чарни (1948) и, параллельно, А.М. Обухов в работе о геострофическом ветре. Они предложили идею квазигеострофического приближения. Я процитирую Чарни, который сделал первый успешный модельный прогноз погоды в 1950 году: теория аппроксимации, предложенная в данной работе, состоит в обосновании того, что роль индивидуальной производной плотности по времени практически полностью зависит от вертикального движения. Это то самое геострофическое приближение, дифференцируемое по времени. То же самое у А. М. Обухова.

Так в чем же проблема? Мне кажется, что проблема именно в масштабах. Уравнения правильные, но в некоторых моментах неправильно оценены масштабы. Это критично для выводов. Рассмотрим полную производную давления по времени, которая состоит из трех: есть адвекция давления, потом интеграл частной производной плотности по вертикали и член $-\rho v_z g$. Адвективный член получается порядка 10^{-4}. Какие масштабы движения мы рассматриваем? Мы рассматриваем синоптические масштабы движения. Все масштабы внутренне взаимосвязаны, неверно говорить, что мы рассматриваем только масштабы движений больше или меньше какого-то порогового значения. Если мы знаем одни масштабы, например, горизонтальные и по времени, то соответственно будут меняться и масштабы вертикальные, связанные с уравнением неразрывности. Поэтому для синоптических масштабов у нас масштаб 10^6 метров, т.е. 1000 км. А вертикальный масштаб у нас всегда 10 км – примерная высота нижней атмосферы - тропосферы. Время же всегда соответственно получается порядка суток или нескольких часов, но не минут, потому что для синоптических масштабов очевидно, что синоптическая картина, например, циклон, за несколько минут и даже за час существенно не изменится. При этом масштаб вертикальной скорости порядка сантиметров. Это известный факт. Если мы вертикальный масштаб увеличим до метров, то у нас сразу это скажется на горизонтальном масштабе, который станет порядка 10 км. Это уже конвективные ячейки, грозовые явления. Они взаимосвязаны, т.е. в таких масштабах адвекция давления, условно говоря, 10 гПа на 1000 км со скоростью 10 м/с, получается 10^{-4}. Производная плотности по времени, если тенденция давления у нас порядка нескольких гПа в сутки (десять максимум), получается порядка 10^{-3}. А порядок слагаемого, связанного с вертикальной скоростью $\rho v_z g$, если порядок скорости это 10^{-2}и $\rho = 1$, есть 10^{-1}. То есть различие - на 2 порядка. Если оставить только старшее слагаемое, то получится уравнение гидростатики Холтона, которое используется. Это неточное уравнение, это приближение, но приближение для процессов синоптического масштаба.

Нигматулин Р.И.: Владимир Анатольевич, позвольте я Вас прерву. Ведь я здесь показал, что холтоновский член $\rho v_z g$ полностью компенсируется. Вообще его нет. Это неправильно. Это противоречит школьной физике. Утверждение теоремы абсолютно неверное, не зависит это от масштабов. Холтон никогда не верен.

Семенов В.А.: Частную производную давления, или плотности, в данной точке можно оценить независимо.

Нигматулин Р.И.: Мы можем оценивать, конечно, но есть точные результаты. Я опираюсь на законы природы. Из законов природы следует, что $\rho v_z g$ со знаком «-» входит во второе слагаемое. Что сделал Холтон? Он записал:

$\frac{dp}{dt} = -\rho v_z g$ (*).

Я же утверждаю, что данное слагаемое входит в $\frac{dp}{dt}$ со знаком «+»! Вы можете им пренебречь. Данное слагаемое мало. Это может быть в природе. Но абсолютно неверно писать (*).

Семенов В.А.: Я показал, что если провести масштабный анализ уравнения, то оно сводится к Холтону.

Нигматулин Р.И.: Этот масштабный анализ у Вас неверен. Я говорю про точный результат, а вы приводите какие-то оценки.

Семенов В.А.: Мое возражение состоит в том, что при описании процессов синоптического масштаба используемые сейчас уравнения правильны и не приводят к ошибке. Но вполне возможно, что для уравнений для процессов других масштабов не следует использовать уравнения Холтона.

Итак, если позволите, я резюмирую свой комментарий. Уважаемый автор доклада представил оригинальный вывод уравнений движения атмосферы в квазигидростатическом приближении, получив асимптотически точное диагностическое уравнение для вертикальной скорости. Полученный результат основывается на известном с начала 20 века уравнении тенденции давления (tendency equation), см. например Eliassen, 1949 (The Quasi-static Equations of Motion with Pressure as Independent Variable, Geofysiske publikasjoner. vol. 17. no. 3.]). Вывод такого уравнения независимым способом представляет несомненный интерес и является новым и важным результатом.

Вместе с тем, нельзя согласиться с выводами о том, что используемое в настоящее время диагностическое уравнение для вертикальной скорости является ошибочным. При моделировании крупномасштабной динамики атмосферы, синоптических процессов и планетарных волн, с характерными пространственными масштабами 1000 км, масштабом горизонтальной скорости 10 м/с, масштабов времени суток, масштабом вертикальной скорости 1 см/с, тенденций давления по пространству и времени ~ 10 гПа/1000 км и 10 гПа/сутки, масштабный анализ уравнения тенденции давления (формула 3.7) приводит к «стандартной формуле Холтона» (формула 5.5). Таким образом, ее использование для описания процессов с вышеприведенными масштабами вполне обосновано.

Полученные докладчиком уравнения можно использовать для описания движений конвективного характера, где они, возможно (что нужно проверить с помощью численного интегрирования), дадут более точный результат.

Также отмечу, что значительная часть усилий по адаптации примитивных уравнений движения для задач прогноза погоды в период развития этой области гидрофизической гидродинамики была связана с необходимостью избавиться от членов горизонтальной дивергенции, поскольку задание скоростей как начальных условий невозможно с требуемой точностью (как полвека назад, так и сейчас). В предложенном уравнении для вертикальной скорости такие слагаемые присутствуют, что вызывает вопросы о его применимости для практических задач прогноза. Спасибо за внимание.

Семенов С.М. (председательствующий): Спасибо, Владимир Анатольевич. Мы в дискуссии упустили одну важную вещь, а именно преимущества использования квазигидростатической асимптотики при численном моделировании. Докладчик утверждает, что использование квазигидростатического приближения при машинном решении уравнений сильно экономит машинное время, чуть ли не в 1000 раз. Может быть кто-нибудь, работающий с вычислительными схемами, прокомментирует данное утверждение?

Кострыкин Сергей Владимирович (Институт вычислительной математики РАН): *Если учитывать инерцию по вертикали, то это уже не гидростатическое приближение. Соответственно, уравнения будут сложнее. А гидростатическое приближение, которое используется в большинстве прогностических климатических моделей на данный момент, основано на использовании другой вертикальной координаты. Там используется давление. И вертикальная скорость там получается из уравнения неразрывности.*

Семенов С.М.(председательствующий): *Спасибо, Сергей Владимирович. Есть ли еще желающие высказаться?*

Сонечкин Дмитрий Михайлович (Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН): Роберт Искандрович рассматривает процессы типа конвекции. А в прогностических моделях прогноза погоды и современных климатических моделях действительно рассматриваются другие процессы, как упоминал оппонент, процессы синоптического масштаба. У них вертикальные скорости порядка единиц см, и не более. Соответственно, горизонтальные масштабы 1000 км, время – сутки и более. Вывод оппонента о том, что Холтон был прав, является верным. Мне кажется следует учитывать (как это делал Лоренц) те слагаемые, которые Роберт Искандрович отбрасывает.

Оппонент упоминал знаменитую работу А.М. Обухова о геострофическом ветре. Можно добавить, что Обухов на самом деле рассматривал идеальную жидкость, и у него гравитационные волны были в начальный момент, но поскольку рассматривалась бесконечная плоскость, то они со временем разбегались и исчезали. Энергия уходила в бесконечность. На самом деле правильное решение указал чуть позже американец Блюмен. Он указал, что принципиальным является учет вязкости. За счет вязкости гравитационные волны затухают в реальной атмосфере.

В целом, если рассматривать процессы синоптического масштаба с маленькими вертикальными скоростями порядка единиц см, то горизонтальная дивергенция, которая происходит в планетарном приграничном слое, является решающим фактором, который все определяет. И действительно, как правильно оппонент сказал, современные прогностические модели и модели климатические в этом смысле правильные, поскольку учитывают неявно это предположение.

Если рассматривать так, как это делает Роберт Искандрович, конвективные процессы, то гидростатика сейчас там не применяется. Конвективные процессы считаются сейчас безмасштабными процессами, в них гидростатическое приближение не используется. Это масштабы порядка десятка км по горизонтали и время порядка часа. Использование гидростатического приближения в этих мезомасштабных моделях практически оказалось тупиковым, не удается описать развитие конвекции. Поэтому и пришли к негидростатическим моделям.

Нигматулин Р.И.: Если при этих масштабах использовать вертикальную инерцию, это непрофессионально.

Семенов С.М. (ИГКЭ): Роберт Искандрович, Вы сказали, что если использовать этот масштаб времени (синоптический), т.е. не секунды или минуты, а гораздо большие промежутки времени, то добавление массы воздуха над данной точкой мгновенно приводит к установлению нового давления в соответствии с гидростатикой. А если мы добавляем массу не сверху, а сбоку, эта точка также это почувствует мгновенно?

Нигматулин Р.И.: Да, почувствует мгновенно, поскольку давление по горизонтали изменяется тоже безынерционным образом.

Хочу добавить. Владимир Анатольевич, я согласен с Вами, что есть множество процессов, где вертикальная скорость (см/сек) практически ноль. Но я сейчас говорю, что в рамках кинетически обоснованного приближения надо написать точные уравнения. Вы сказали, что надо учесть Лоренца: мах в квадрате. Я говорю, что не надо!

Отвечу на второе замечание. Действительно, гениальные люди нашли такой метод, который позволяет, введя специальную вертикальную координату в уравнении для горизонтальных течений, решать его независимо от вертикали в своем приближении. Там тоже геострофика. У меня в моих уравнениях тоже можно сделать геострофику.

Я утверждаю, что правильно надо писать уравнение для вертикальной скорости как на слайде 18, потому что если я пренебрег вертикальной инерцией, то и третье слагаемое не нужно (желтым выделено на слайде). Это все следует из асимптотического анализа, который я здесь не приводил.

Если масштабы по времени больше, чем десятки секунд (в том числе и часы, и сутки, и какие угодно большие), если характерное расстояние более км и т.д., то мои уравнения точные.

Есть масса случаев, где какими-то членами можно пренебречь. Что такое геострофика? В этой общей системе уравнений на слайде 22 это только следствие законов природы и предположения гидростатики. Есть и другие предположения. Например, частной производной $\frac{\partial v_x}{\partial t}$ можно пренебречь в уравнении. Тогда не нужно начальных условий для этих скоростей, задача сильно упрощается, но этого нельзя делать, если Вы находитесь на экваторе. Вне экватора это стационарный процесс. Еще раз подчеркну, есть множество процессов, для которых эти уравнения можно упростить. Но это точные уравнения. Таким образом, упрощайте точные уравнения! А то, что написал Холтон, абсолютно неверно.

Семенов С.М. (председательствующий): Подведем итог на качественном уровне: во-первых, участники дискуссии считают, что уравнения, о которых нам Роберт Искандерович рассказывал, правильные; во-вторых, в вычислительных схемах предположение гидростатичности уже используется программистами; уважаемый комментатор В.А. Семенов полагает, что уравнения Холтона все же корректны для тех случаев, для которых они предназначены.

То, что мы слышали сегодня, очень непростая материя. Конечно, нельзя в ходе одного обсуждения до конца разобраться во всех деталях, хотя в некоторых мы разобрались. У меня остались некоторые вопросы, связанные с тем, как понимается во всех этих рассмотрениях асимптотика: при стремлении малого параметра к нулю одна система уравнений переходит в другую или же и в решениях также можно переходить к пределу. Надеюсь, что мы еще будем иметь возможность обсудить все эти интересные вопросы.

Поблагодарим Роберта Искандровича Нигматулина за очень интересный доклад и представленные серьезные результаты, Владимира Анатольевича Семенова за развернутый комментарий и всех коллег за участие в интересной дискуссии. Спасибо.